

Pares de Amigos e Inimigos em Grafos Planares Perfeitos

Este exemplar corresponde à redação final da
Dissertação devidamente corrigida e defendida
por Rudini Menezes Sampaio e aprovada pela
Banca Examinadora.

Fortaleza, 18 de Dezembro de 2000.

Dra. Cláudia Linhares Sales (DC/UFC)

Dissertação apresentada ao Mestrado em
Ciência da Computação, UFC, como requisito
parcial para a obtenção do título de Mestre em
Ciência da Computação.

© Rudini Menezes Sampaio, 2000.

Todos os direitos reservados.

Mestrado em Ciência da Computação

Universidade Federal do Ceará

Pares de Amigos e Inimigos em Grafos Planares Perfeitos

Rudini Menezes Sampaio¹

18 de Dezembro de 2000

Banca Examinadora:

- Dra. Cláudia Linhares Sales (DC/UFC)
- Dr. Jayme Szwarcfiter (NCE/UFRJ)
- Dr. Manoel Bezerra Campelo Neto (DC/UFC)
- Dr. Ricardo Cordeiro Corrêa (DC/UFC)

¹Suportado pelo CAPES

Sumário

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introdução | 8 |
| 1.1 | Motivação | 8 |
| 1.2 | Terminologia | 9 |
| 1.3 | Grafos Perfeitos | 11 |
| 1.4 | Pares de Amigos | 13 |
| 1.5 | Grafos Planares | 15 |
| 2 | Árvore de Decomposição de Grafos Planares | 17 |
| 2.1 | Definição dos cortes | 17 |
| 2.2 | Visão geral da decomposição | 19 |
| 2.3 | Classes das folhas | 20 |
| 2.4 | Informações adicionais | 21 |
| 3 | Pares de Amigos em Grafos Planares Perfeitos | 22 |
| 3.1 | Visão Geral | 22 |
| 3.2 | Introspecção | 24 |
| 3.3 | Separação de Amigos | 27 |
| 3.4 | Amigos Fortes | 35 |
| 3.5 | Amigos Fraternos | 41 |
| 3.6 | Recuperação de Amigos Fortes | 42 |
| 3.7 | Método Polinomial | 44 |
| 3.8 | Teorema Principal | 48 |

| | |
|--|-----------|
| 3.9 Pares de Amigos em Grafos Planares Perfeitos | 49 |
| 4 Conclusão e Considerações Finais | 52 |
| A Reconhecimento de Grafos Planares Perfeitos | 53 |
| B Reconhecimento de Grafos Planares de Quase Paridade Estrita | 68 |
| Bibliografia | 77 |

Lista de Figuras

| | | |
|-----|---|----|
| 1.1 | a(garra), b(diamante), c(touro), d(K_4) e e(P_4) | 13 |
| 1.2 | Relações de continência entre as classes QP , QPS e PC (a) Grafo QP , mas não QPS (b) Grafo QPS , mas não PC (c) Grafo PC | 14 |
| 1.3 | Exemplo de uma seqüência de contração de pares de amigos levando a um grafo fácil de colorir | 15 |
| 2.1 | Algoritmo de Decomposição de Grafos Planares | 19 |
| 2.2 | (a) S_1 , (b) S_2 , (c) S_3 . A classe $\mathbf{S} = S_1^* \cup \{S_2, S_3\}$, onde S_1^* consiste do grafo S_1 e qualquer grafo obtido pela troca de um ou mais entre as arestas a, b e c de S_1 por um caminho induzido de tamanho 3 | 20 |
| 2.3 | Estrutura de vizinhança dos grafos da classe L | 21 |
| 3.1 | Auxílio à prova do Lema 3 | 26 |
| 3.2 | Vizinhança nas folhas L de um grafo introspectivo | 27 |
| 3.3 | Auxílio às explicações do Lema 4 | 29 |
| 3.4 | Auxílio às explicações do Lema 6 | 33 |
| 3.5 | Introdução dos Z -vértices z em cortes II-a , II-c e III-a , onde a_1 e b_1 são A -vértices | 34 |
| 3.6 | Outras componentes proibidas aos cortes do tipo II-a , II-c e III-a | 34 |
| 3.7 | Recuperação do par de amigos $\{x, y\}$ através de Z -vértices | 35 |
| 3.8 | Exemplo da seqüência $H(x, y) = \{H_0, \dots, H_k\}$ | 36 |
| 3.9 | Auxílio às explicações do Lema 8 | 38 |

| | | |
|------|---|----|
| 3.10 | Auxílio às explicações do Lema 9 | 39 |
| 3.11 | Auxílio às explicações do Lema 10 | 40 |
| 3.12 | Exemplos de pares de amigos fortes | 43 |
| 3.13 | Algoritmo de Obtenção de Pares de Amigos em Grafos Planares Perfeitos . | 50 |
| 3.14 | Continuação do Algoritmo de Obtenção de Pares de Amigos em Grafos Planares Perfeitos | 51 |
| A.1 | Algoritmo de Decomposição de Grafos Planares | 54 |
| A.2 | Vários tipos de cortes (a) 2-separação (b) 3-separação (c) 4- separação . . . | 55 |
| A.3 | Vários tipos de 2-separação | 57 |
| A.4 | Componentes proibidas para a 3-separação | 57 |
| A.5 | Vários tipos de 3-separação | 58 |
| A.6 | Estrutura de vizinhança dos grafos da classe L | 59 |
| A.7 | Exemplo de um grafo da classe L | 61 |
| A.8 | grafo da classe Φ | 62 |
| A.9 | (a)Vários G'_2 s. (b) Configuração de x, y, z, x', y' e z' | 63 |
| A.10 | Auxílio às explicações do Lema 3 | 64 |
| A.11 | grafo componente proibido na 4-separação | 65 |
| A.12 | exemplo de um grafo da classe C | 66 |
| B.1 | Vizinhança correta | 69 |
| B.2 | Decomposição de um grafo QPS em grafos que contém obstruções | 73 |

Introdução

1.1 Motivação

No início da década de 60, C. Berge definiu a classe dos grafos perfeitos e formulou duas conjecturas sobre essa classe: a Conjectura Fraca e a Conjectura Forte dos Grafos Perfeitos [1]. A primeira foi provada em 1972 por L.Lovász [14], mas a outra permanece em aberto há mais de 40 anos.

Uma abordagem para a prova da Conjectura Forte de Berge é feita validando-a ou tentando refutá-la para diversas classes de grafos existentes. Por exemplo, A. Tucker provou que para os grafos planares a Conjectura Forte é válida [22] (com esse resultado, W. L. Hsu (1987) desenvolveu um algoritmo polinomial para o reconhecimento de grafos planares perfeitos [10], que será de grande importância para esta dissertação).

Uma outra abordagem para a prova da Conjectura Forte foi explorada por H. Meyniel, em 1976, através de grafos minimalmente imperfeitos (g.m.i). Para se desvendar a estrutura dos g.m.i, Meyniel introduziu o conceito de pares de amigos, que consistem de pares de vértices não adjacentes tais que todos os caminhos induzidos entre eles são pares. Meyniel provou que nenhum g.m.i possui um par de amigos [16]. Infelizmente, decidir se um grafo qualquer contém um par de amigos é um problema co-NP-Completo [2].

Com respeito aos grafos perfeitos, B. Reed formulou a conjectura de que existe algoritmo polinomial para encontrar pares de amigos em um grafo perfeito [20]. Essa conjectura

foi validada para várias classes de grafos perfeitos. Em 1993, W. L. Hsu e O. Porto estudaram essa conjectura para os grafos planares perfeitos e afirmaram ser possível demonstrá-la para essa classe de grafos, não tendo, entretanto, apresentado a prova [25]. O objetivo desta dissertação de mestrado é provar a conjectura de B. Reed para os grafos planares perfeitos, ou seja, provar que um par de amigos em um grafo planar perfeito pode ser obtido em tempo polinomial.

No decorrer desse documento, nós apresentaremos mais detalhadamente esses conceitos, mostrando a árvore de decomposição de grafos planares que será utilizada para a prova da conjectura de B. Reed para os grafos planares perfeitos, revelando como obter polinomialmente um par de amigos nesses grafos. No Anexo A, apresentamos uma explicação mais detalhada sobre o algoritmo de W. L. Hsu para reconhecimento de grafos planares perfeitos e a sua árvore de decomposição. No anexo B, trataremos sobre dois artigos de C. Linhares-Sales sobre grafos **QPS** planares que, além de usar a decomposição de W. L. Hsu, fornece-nos ferramentas para obter nossos resultados.

1.2 Terminologia

Um *grafo* $G = (V, E)$ é uma dupla ordenada de conjuntos V e E , onde V é um conjunto de *vértices* e E é um conjunto de pares não ordenados de V , chamados de *arestas*. Denominaremos por $V(G)$ e $E(G)$, respectivamente, o conjunto de vértices e o conjunto de arestas de G . Dizemos que os vértices x e y são as *extremidades* de uma aresta $e = (x, y)$. Dizemos que duas arestas são *múltiplas*, se elas coincidem em ambas as extremidades. Definimos *laço* como sendo uma aresta cujas extremidades são iguais. Um grafo é *simplex* se ele não admite arestas múltiplas nem laços. Um grafo é *finito* se o conjunto de vértices é finito. Em nosso estudo, consideraremos apenas grafos finitos simples.

Uma *representação gráfica* de um grafo consiste de um desenho geométrico onde os vértices são representados por pontos no plano e uma aresta $e = (x, y)$ é representada por uma linha unindo os vértices x e y . Dizemos que um grafo é *planar* se ele pode ser representado graficamente, sem interseção de arestas. Uma representação gráfica de um

grafo planar divide o plano em regiões chamadas *faces*. Define-se a *fronteira* de uma face como sendo a seqüência de vértices que delimitam essa face.

Dizemos que dois vértices x e y são *adjacentes* se $(x, y) \in E(G)$. Definimos a *vizinhança aberta* de um vértice x , $N(x)$, como sendo o conjunto dos seus vértices adjacentes. Definimos a *vizinhança fechada* $N[x]$ como sendo $N(x) \cup \{x\}$. Dizemos que duas arestas são *adjacentes* se elas coincidem em uma de suas extremidades. Um *caminho* em um grafo G é uma seqüência de vértices de G , $v_0 v_1 \dots v_k$, onde, para $i, j \in \{0, \dots, k-1\}$, $i \neq j$, $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$ e $v_i \neq v_j$. O vértice v_0 é chamado de vértice inicial do caminho, e o vértice v_k é chamado de vértice final do caminho. Um *ciclo* é um caminho com mais de 3 vértices onde o vértice inicial é igual ao vértice final.

Definimos o *complemento* \overline{G} de G como sendo o grafo onde $V(\overline{G}) = V(G)$ e $(x, y) \in E(\overline{G})$ se e somente se $(x, y) \notin E(G)$, $\forall x, y \in V(G)$. Definimos o grafo *linha* de G , denominado G' , como sendo o grafo onde os vértices de G' representam as arestas de G e dois vértices de G' são adjacentes se e somente se as respectivas arestas são adjacentes em G .

Um grafo $G = (V, E)$ é *bipartite* se V pode ser particionado em dois conjuntos V_1 e V_2 ($V_1 \cup V_2 = V$ / $V_1 \cap V_2 = \emptyset$), tais que não existem arestas entre elementos do mesmo subconjunto V_1 ou V_2 . Um conjunto *independente* (ou *estável*) de G é um conjunto de vértices de G não adjacentes entre si.

Um grafo $G = (V, E)$ é *completo* se $\forall x, y \in V, (x, y) \in E$. Um *subgrafo* H de G é um grafo onde $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Um subgrafo H de G é *induzido* se $\forall x, y \in V(H), (x, y) \in E(H)$ se e somente se $(x, y) \in E(G)$. Definimos a notação $G[V_i]$ como sendo o subgrafo de G induzido sobre os vértices de $V_i \subseteq V(G)$. Nesse caso, dizemos que V_i induz o subgrafo $G[V_i]$. Uma *clique* de um grafo é um subconjunto de vértices que induz um grafo completo.

Um caminho em um grafo é induzido se não há arestas entre vértices não adjacentes no caminho. Um caminho é par (ímpar) se ele possui um número par (ímpar) de vértices. Definimos um *buraco* como sendo um ciclo induzido com 5 vértices ou mais. Denotaremos por C_{2k} (C_{2k+1}) um buraco par (ímpar) com $2k(2k+1)$ vértices, $k > 1$.

Definimos um *par de amigos* (ou *dupla par*) $\{x, y\}$ como sendo dois vértices não adjacentes x e y tais que todos os caminhos induzidos entre eles são pares. Definimos um *par de inimigos* (ou *dupla ímpar*) $\{x, y\}$ como sendo dois vértices não adjacentes x e y tais que todos os caminhos induzidos entre eles são ímpares.

Dizemos que um grafo G é *conexo* se existem caminhos entre todos os pares de vértices de G , caso contrário dizemos que G é *desconexo*. Definimos um *corte de vértices* (ou simplesmente *corte*) C de um grafo conexo G como sendo um conjunto de vértices $C \subset V(G)$, tal que o grafo induzido sobre o conjunto de vértices $V(G) - C$ é desconexo. Definimos as *componentes* de um grafo como sendo os subgrafos conexos maximais de G . Dizemos que um grafo G não completo é k -conexo, se G não possui um corte de cardinalidade inferior a k .

Definimos *contração* de vértices $\{a, b\}$ do grafo G , como sendo a operação que gera o grafo $G \setminus ab$, tal que $V(G \setminus ab) = V(G) - \{b\}$ e $E(G \setminus ab) = E(G[V(G \setminus ab)]) \cup \{(a, x), \forall x \in N(b)\}$. Ou seja, é a operação que gera um grafo onde os vértices a e b são contraídos num único vértice, cuja vizinhança é $N(a) \cup N(b)$.

1.3 Grafos Perfeitos

A coloração de vértices é um problema de grande importância na teoria dos grafos, com aplicações em questões práticas como escalonamento de tarefas e alocação de frequências. O problema consiste em obter o menor número possível de cores (denominado *número cromático*) que podem ser dadas aos vértices (uma cor para cada vértice), de forma que dois vértices adjacentes não possuam a mesma cor.

No estudo da coloração, observa-se que o número cromático $\chi(G)$ de um grafo G deve ser maior ou igual ao tamanho da maior clique de G , $\omega(G)$, pois todos os vértices da sua clique máxima devem possuir cores diferentes. Em outras palavras, $\omega(G) \leq \chi(G)$, \forall grafo G .

Definição 1.1 Dizemos que um grafo G é perfeito se e somente se, para todo subgrafo induzido H de G , o tamanho da maior clique é igual ao número cromático.

Em outras palavras, $\omega(H) = \chi(H)$, $\forall H \subseteq G$ perfeito, tal que H é induzido. Com essas observações, C. Berge formulou as seguintes conjecturas [1]:

Conjectura Fraca dos Grafos Perfeitos: Um grafo G é perfeito se e somente se o seu complemento \overline{G} também é perfeito.

Conjectura Forte dos Grafos Perfeitos: Um grafo G é perfeito se e somente se G não possui como subgrafo induzido um buraco ímpar ou um complemento de buraco ímpar.

Ele as denominou assim porque a Conjectura Forte implica a Conjectura Fraca. A Conjectura Fraca foi provada por L. Lovász em 1972. Com isso, ela se tornou o Teorema dos Grafos Perfeitos [14]. A Conjectura Forte permanece em aberto há mais de 40 anos.

A Conjectura Forte é de grande importância, caso ela seja verdadeira, porque fornece uma forte característica estrutural para os grafos perfeitos. Na realidade, a maioria dos estudiosos a considera como verdadeira, faltando apenas uma prova formal para isso, visto que até hoje não foi encontrado um único contra-exemplo que a negasse.

A Conjectura Forte foi provada para diversas classes de grafos. Em 1973, A. Tucker provou que um grafo planar é perfeito se e somente se ele não possui buracos ímpares [22]. Além dos grafos planares, a Conjectura Forte também já foi provada para outras classes de grafos, como grafos sem garras [12], sem diamantes [13], sem touros [24], sem K_4 [23] e sem P_4 [21], ilustrados na Figura 1.1.

Centenas de artigos foram escritos sobre grafos perfeitos, muitos deles tentando se aproximar de uma prova para a Conjectura Forte por caminhos diversos. Com o advento da teoria da NP-Compleitude, iniciado por S. Cook em 1971 [6], provou-se que o problema de se obter $\omega(G)$ e $\chi(G)$ em um grafo G qualquer é NP-Difícil [17].

Em 1984, M. Grötschel, A. Schrijver e L. Lovász desenvolveram um algoritmo em tempo polinomial capaz de obter $\omega(G)$ e $\chi(G)$ para um grafo perfeito G [18]. Esse algoritmo se baseia no método elipsóide de programação linear, e possui eficiência prática

ruim $O(n^9)$.

Até o momento não foi encontrado nenhum algoritmo polinomial eficiente que utilize as propriedades combinatórias e estruturais dos grafos perfeitos para obter ω e χ em um grafo perfeito.

Por outro lado, a estrutura dos pares de amigos vem sendo utilizada para obter tais algoritmos para algumas subclasses dos grafos perfeitos. Esse assunto será tratado na próxima seção.

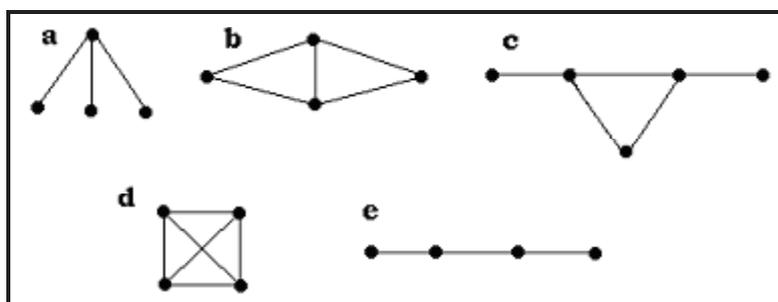


Figura 1.1. a(garra), b(diamante), c(touro), d(K_4) e e(P_4)

1.4 Pares de Amigos

Uma outra abordagem para a demonstração da Conjectura Forte de Berge é através dos grafos *minimalmente imperfeitos* (g.m.i). Um grafo G é g.m.i se e somente se G não é perfeito, mas todo subgrafo $H \subset G$, $H \neq G$, é perfeito.

Desta forma teríamos a seguinte conjectura equivalente a Conjectura Forte: G é g.m.i se e somente se G é buraco ímpar ou complemento de buraco ímpar.

É fácil verificar pela definição de g.m.i, que se um grafo é g.m.i, então seu complemento também é g.m.i. Isso porque, se o complemento \overline{G} de um grafo g.m.i G não for g.m.i, então \overline{G} terá um subgrafo g.m.i \overline{H} induzido cujo complemento H deve ser perfeito, por ser subgrafo induzido de G , uma contradição pois, segundo o Teorema dos Grafos Perfeitos de L.Lovász, se H é perfeito, \overline{H} também é.

Definimos um par de amigos $\{a, b\}$ como sendo dois vértices não adjacentes tais que

todos os caminhos induzidos entre eles são pares. Em 1982, J. Fonlupt e J. P. Uhry provaram que se $\{a, b\}$ é um par de amigos em um grafo G perfeito, então $G \setminus ab$ (contração de a e b) também é um grafo perfeito, e que $\omega(G \setminus ab) = \omega(G)$ [11].

Em 1987, a respeito da estrutura dos g.m.i, H. Meyniel provou o Lema dos Pares de Amigos [16], que diz que nenhum g.m.i possui um par de amigos. Na mesma ocasião, Meyniel definiu as seguintes classes sobre pares de amigos:

- **(QP)** Quase Paridade, onde para todo subgrafo induzido $H \subseteq G$, H ou \overline{H} é uma clique ou possui um par de amigos.
- **(QPS)** Quase Paridade Estrita, onde para todo subgrafo induzido $H \subseteq G$, H é uma clique ou possui um par de amigos.

Em 1990, M. E. Bertschi definiu a seguinte classe sobre pares de amigos [15]:

- **(PC)** Perfeitamente Contractível, onde para todo subgrafo induzido $H \subseteq G$, existe uma seqüência de grafos $H = H_0, H_1, \dots, H_k$, onde H_i foi obtido de H_{i-1} por contração de pares de amigos e H_k é um grafo completo.

Na Figura 1.2, podemos observar exemplos dessas classes e suas relações de continência. Existem alguns resultados interessantes sobre essas classes que serão tratados mais adiante.

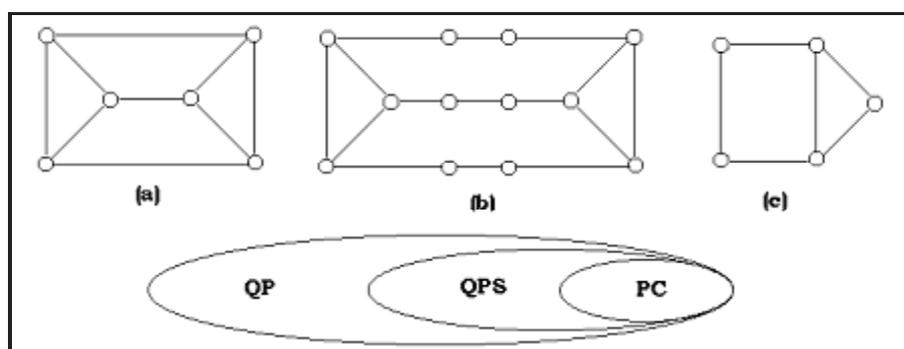


Figura 1.2. Relações de continência entre as classes **QP**, **QPS** e **PC** (a) Grafo **QP**, mas não **QPS** (b) Grafo **QPS**, mas não **PC** (c) Grafo **PC**

Temos então uma estrutura (par de amigos) que pode ser utilizada para colorir grafos perfeitos de uma forma ótima (pelo resultado de J. Fonlupt e J. P. Uhry), e uma heurística para colorir grafos quaisquer. Basta ir contraindo pares de amigos até obtermos algum grafo de uma classe de grafos que se sabe colorir. Ao final, colore-se um vértice u do grafo original com a cor dada ao vértice v do grafo final em que u é um dos integrantes do seu processo de contração. Na Figura 1.3, por exemplo, os vértices b e e do grafo original são coloridos com a cor dada ao vértice be do grafo contraído. Infelizmente, o problema de se obter um par de amigos em um grafo qualquer é NP-Difícil [2].

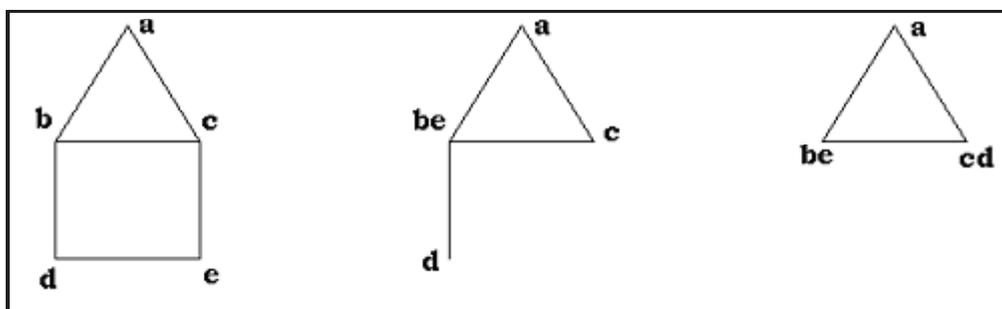


Figura 1.3. Exemplo de uma seqüência de contração de pares de amigos levando a um grafo fácil de colorir

Com respeito aos grafos perfeitos, B. Reed formulou a conjectura de que existe algoritmo polinomial para encontrar pares de amigos em um grafo perfeito [20].

Essa conjectura já foi provada para diversas classes de grafos perfeitos, como por exemplo, para os grafos de Meyniel [16] e para os grafos fracamente triangulados [19]. Os grafos de Meyniel são perfeitos [16], e os fracamente triangulados também [8].

1.5 Grafos Planares

Usualmente, utiliza-se os grafos planares para testar a validade de uma conjectura. Essa preferência vem das suas propriedades topológicas e também do fato de já existirem muitos teoremas provados sobre essa classe, desde o famoso Teorema de Euler até o Teorema de Kuratowsky (1930) de caracterização de grafos planares.

Em 1973, A. Tucker validou a Conjectura Forte de Berge para grafos planares [22]. Ou seja, ele provou que um grafo planar é perfeito se e somente se ele não possui buracos ímpares. Isso é consistente com a Conjectura Forte, visto que $\overline{C_5} = C_5$ e para $k \geq 3$, $\overline{C_{2k+1}}$ é não planar.

Na sua prova, Tucker utilizou o conceito de grafos minimalmente imperfeitos (g.m.i) já mencionado e o conceito da classe de grafos denominada *Berge*. Um grafo é dito *Berge*, se ele não tiver como subgrafo induzido nenhum buraco ímpar e nenhum complemento de buraco ímpar. Utilizando as propriedades dos grafos Berge minimalmente imperfeitos (B.m.i), Tucker provou que não existe grafo planar B.m.i, ou seja, que todo grafo planar Berge é perfeito. Aqui vale ressaltar que provar que todo grafo Berge é perfeito (ou que não existe grafo B.m.i) é equivalente a provar a Conjectura Forte de Berge.

Sobre o resultado de A. Tucker para os grafos planares, W. L. Hsu (1987) obteve um algoritmo polinomial para o problema de reconhecimento de grafos planares perfeitos, determinando a existência ou não de um buraco ímpar, visto que em um grafo planar não existe complemento de buraco ímpar [10]. A decomposição de W. L. Hsu é bastante elaborada e complexa, sendo mais detalhada posteriormente.

Em 1993, W. L. Hsu e O. Porto estudaram a conjectura de B. Reed para os grafos planares perfeitos e afirmaram ser possível demonstrá-la para essa classe de grafos, não tendo, entretanto, apresentado a prova [25]. O objetivo desta dissertação de mestrado é provar a conjectura de B. Reed para os grafos planares perfeitos, ou seja, provar que um par de amigos em um grafo planar perfeito pode ser obtido em tempo polinomial.

As demonstrações de A. Tucker e W. L. Hsu serviram como um excelente material de ataque a esse problema. Além disso, C. Linhares-Sales, F. Maffray e B. Reed (1997) obtiveram um algoritmo de reconhecimento de grafos **QPS** planares [4] e de reconhecimento de grafos **PC** planares [3]. Esses algoritmos de reconhecimento utilizam a decomposição de W. L. Hsu para grafos planares perfeitos e, por isso, foram de grande utilidade para alcançar o nosso objetivo. Outros artigos foram de grande importância para esse trabalho, e serão citados em momento oportuno.

Árvore de Decomposição de Grafos Planares

Dado um grafo planar $G = (V, E)$, W. L. Hsu [10] associa a G uma árvore de decomposição T . A raiz de T é G . Se um grafo H é um nó de T , e H admite um corte Q de um dos tipos explicados a seguir, então os filhos de H em T são grafos específicos H_i construídos a partir das componentes de $H - Q$ como explicado posteriormente. Se H não possui tal corte, então H é uma folha de T . O principal resultado de Hsu em [10] é que G é perfeito se e somente se todas as folhas de T estão na união de três classes especiais **S**, **L** e **C**, ou são isomorfas a K_3 ou a K_4 . A seguir, definiremos os tipos dos cortes da árvore de decomposição de Hsu, definiremos essas três classes especiais, e apresentaremos uma visão geral da decomposição.

2.1 Definição dos cortes

Nessa seção, apresentaremos os cortes utilizados na decomposição de Hsu para um grafo planar perfeito G . A definição dos cortes para um grafo planar qualquer está descrita de forma detalhada no Anexo A.

Seja G um grafo planar perfeito, e T a sua árvore de decomposição. Seja H um nó de T que admite um corte Q . Sejam B_1, \dots, B_k as componentes de $H - Q$. Sejam H_1, \dots, H_k

2. Árvore de Decomposição de Grafos Planares

os filhos de H em T . Dizemos que Q é um corte válido da árvore de decomposição de G , se Q é de um dos tipos abaixo:

- **Tipo I:** $Q = \{a\}$ (um vértice): H_i é definido pelo grafo $H[V(B_i) \cup Q]$.
- **Tipo II:** $Q = \{a, b\}$:
 - **II-a:** Q é uma aresta: H_i é definido pelo grafo $H[V(B_i) \cup Q]$.
 - **II-b:** Q é um par de amigos: H_i é obtido a partir de $H[V(B_i) \cup Q]$ e adicionando um vértice artificial que forma um caminho induzido de tamanho dois entre a e b .
 - **II-c:** Q é um par de inimigos: H_i é obtido a partir de $H[V(B_i) \cup Q]$ e adicionando dois vértices artificiais que formam um caminho induzido de tamanho três entre a e b .
- **Tipo III:** $Q = \{a, b, c\}$:
 - **III-a:** Q é um triângulo: H_i é definido pelo grafo $H[V(B_i) \cup Q]$.
 - **III-b:** Em Q , ab e bc são arestas e ac é um par de amigos: H_i é obtido a partir de $H[V(B_i) \cup Q]$ e adicionando um vértice artificial que forma um caminho induzido de tamanho dois entre a e c .
 - **III-c:** Em Q , ab é uma aresta, bc é um par de inimigos e ac é um par de amigos: H_i é obtido a partir de $H[V(B_i) \cup Q]$ e adicionando dois vértices artificiais x e y com arestas ax , cx , by e xy .
- **Tipo IV:** $Q = \{a, b, c, d\}$ induz um C_4 em H onde ab , bc , cd , da são arestas, ac é um par de amigos e todos os caminhos induzidos entre b e d evitando a e c são ímpares: H_i é obtido a partir de $H[V(B_i) \cup Q]$ e adicionando dois vértices artificiais x e y com arestas ax , bx , cx , ay , cy , dy e xy .

2.2 Visão geral da decomposição

A Figura 2.1 apresenta o esboço do algoritmo de Hsu de reconhecimento de grafos planares perfeitos. Note que os termos *1-inseparável*, *2-inseparável*, *3-inseparável* e *4-inseparável* se referem a grafos que não possuem cortes dos tipos **I**, **II**, **III** e **IV**, respectivamente. Essas definições são mais detalhadas no Anexo A.

1. **Algoritmo:** DECOMPOSIÇÃO
2. **Entrada:** Grafo planar G
- 3.
4. $L_1 \leftarrow \emptyset; L_2 \leftarrow \emptyset; L_3 \leftarrow \emptyset; L_4 \leftarrow \emptyset;$
5. Decomponha G em componentes 1-inseparáveis
6. $L_1 \leftarrow \{\text{componentes 1-inseparáveis de } G\};$
7. **Para** todo grafo H em L_1 **faça**
8. Decomponha H em componentes 2-inseparáveis
9. $L_2 \leftarrow L_2 \cup \{\text{componentes 2-inseparáveis de } H\}$
- 10.
11. **Para** todo grafo H em L_2 **faça**
12. Decomponha H em componentes 3-inseparáveis
13. $L_3 \leftarrow L_3 \cup \{\text{componentes 3-inseparáveis de } H\}$
- 14.
15. **Para** todo grafo H em L_3 **faça**
16. Decomponha H em componentes 4-inseparáveis
17. $L_4 \leftarrow L_4 \cup \{\text{componentes 4-inseparáveis de } H\}$
- 18.
19. **Se** existe algum grafo em L_4 que não pertence a $\mathbf{S} \cup \mathbf{L} \cup \mathbf{C} \cup \{K_3, K_4\}$ **então**
20. G não é perfeito
21. **Senão**
22. G é perfeito

Figura 2.1. Algoritmo de Decomposição de Grafos Planares

2.3 Classes das folhas

Para determinar se G é ou não um grafo perfeito, é necessário identificar se as folhas da árvore de decomposição pertencem ou não as classes **S**, **L** ou **C**, ou são isomorfas a K_3 ou K_4 , que são grafos completos com, respectivamente, 3 e 4 vértices. A seguir, apresentamos as definições das classes **S**, **L** e **C**.

- Classe **S**: consiste de alguns grafos especiais, ilustrados na Figura 2.2.
- Classe **L**: consiste de grafos tais que (i) A vizinhança de cada vértice u é igual a uma dos grafos da Figura 2.3 e (ii) a fronteira de cada face não-triangular é um buraco par.
- Classe **C**: Um grafo G é dito ser da classe **C** se ele satisfaz a propriedade que existe um subgrafo induzido H bipartite de G tal que $V(G) - V(H)$ é um conjunto independente de C_4 -vértices em G , onde um C_4 -vértice é um vértice cujos vizinhos induzem um C_4 .

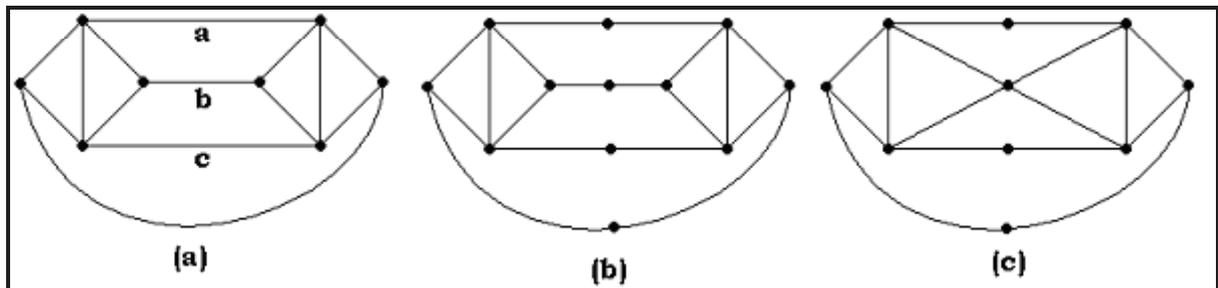


Figura 2.2. (a) S_1 , (b) S_2 , (c) S_3 . A classe $\mathbf{S} = S_1^* \cup \{S_2, S_3\}$, onde S_1^* consiste do grafo S_1 e qualquer grafo obtido pela troca de um ou mais entre as arestas a , b e c de S_1 por um caminho induzido de tamanho 3

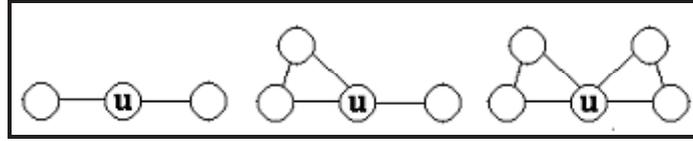


Figura 2.3. Estrutura de vizinhança dos grafos da classe **L**

2.4 Informações adicionais

Em [10], Hsu denomina os vértices artificiais por **A**-vértices. Neste trabalho, será mantida essa notação. Além disso, Hsu prova que os grafos da classe **L** são linha de bipartite, e os grafos da classe **C** são de comparabilidade. Hsu também mostra que a complexidade do processo de decomposição é $O(n^3)$. Esses resultados serão utilizados posteriormente.

Observe na Figura 2.1 que a decomposição por um corte de certo tipo é feita somente se não existem cortes de tipos inferiores. Além disso, para que o processo de decomposição não fique realizando os mesmos cortes, a decomposição proíbe os filhos H_i isomorfos a H .

Observe ainda que em um grafo perfeito 2-conexo, dado um par de vértices $\{x, y\}$ não adjacentes em um corte, se existe qualquer caminho induzido par (ímpar) entre eles em alguma componente, isso é suficiente para garantir que $\{x, y\}$ é um par de amigos (inimigos), senão haveria um buraco ímpar (um absurdo, devido à perfeição e à validade da conjectura forte para os grafos planares). Portanto, obter os cortes da decomposição não é o mesmo que obter pares de amigos ou inimigos em grafos planares perfeitos.

No Anexo A, apresentamos de uma maneira detalhada a base teórica desse algoritmo de reconhecimento de grafos planares perfeitos, incluindo a definição geral dos cortes para grafos planares quaisquer.

Pares de Amigos em Grafos Planares Perfeitos

3.1 Visão Geral

Neste capítulo, provaremos a conjectura de B. Reed para os grafos planares perfeitos, fornecendo um algoritmo para obter, ou afirmar que não existem, pares de amigos em grafos planares perfeitos. Nossa demonstração se baseia fortemente na decomposição de grafos planares, apresentada no capítulo anterior.

A linha lógica da nossa demonstração consiste de 15 lemas e um teorema principal, provados nesse documento. Utilizamos ainda um teorema de W. L. Hsu[10], um de F. Harary e C. Holzmann[7] e outro de S. Hougardy[9].

A seguir daremos uma breve explicação sobre os lemas. Seja G um grafo planar perfeito e T a sua árvore de decomposição.

O Lema 1 prova que um par de amigos não artificiais em uma folha de T é também par de amigos de G . O Lema 2 prova que se ocorreram cortes dos tipos **I**, **II-b**, **III-b**, **III-c** ou **IV**, então G possui pares de amigos, e estes são facilmente obtidos. O Lema 3 prova que se T possui alguma folha da classe **S** ou **C** com mais de 2 vértices, então G possui pares de amigos, e estes são facilmente obtidos. Além disso, o Teorema 1 de Hsu nos mostra como obter polinomialmente pares de amigos em grafos das classes **L** e **C**.

3. Pares de Amigos em Grafos Planares Perfeitos

Resumindo essas informações, obtemos facilmente um par de amigos de G : (a) se em T ocorreram cortes dos tipos **I**, **II-b**, **III-b**, **III-c** ou **IV**, (b) se T possui alguma folha das classes **S** ou **C** com mais de dois vértices ou (c) se alguma folha de T da classe **L** possui pares de amigos.

Diremos então que um grafo é *introspectivo* se ele for planar perfeito não completo e nenhuma dessas condições ocorrerem. Com isso, nosso problema principal será obter pares de amigos em grafos introspectivos.

Nosso problema então é obter pelo menos um par de amigos de em um grafo introspectivo G , se existir. Queremos saber então em que condições, um par de amigos é separado por um corte, e nenhuma componente gerada pelo corte possui um par de amigos. Seja então $\{x, y\}$ um par de amigos nessas condições. Nos Lemas 4 e 6, nós provamos que isso somente ocorre se todos os caminhos induzidos de x (resp. y) para os vértices do corte, evitando os demais são ímpares (cortes **II-a**, **II-c** e **III-a**), ou pares (cortes **II-c**). O Lema 4 prova para os cortes **II-a** e **II-c**. O Lema 5 obtém um resultado importante que é utilizado na prova do Lema 6 para os cortes do tipo **III-a**.

Os resultados desses lemas nos incentivaram a introduzir alguns vértices artificiais, que serão denominados por **Z**-vértices. Tais vértices não alteram significativamente o algoritmo de Hsu de decomposição de grafos planares. A intenção é podermos identificar $\{x, z\}$ e $\{z, y\}$ como pares de amigos ou inimigos nas folhas de T , onde z é um **Z**-vértice, e concluir, de uma maneira a ser esclarecida posteriormente, que $\{x, y\}$ é um par de amigos de G .

Com base nesses resultados, nós definimos um par forte como sendo um par de vértices intuitivamente o mais próximo possível, com relação aos pares de amigos entre eles (a definição formal será apresentada posteriormente). Observaremos então que se G possui pares de amigos, G possui um par de amigos fortes. Portanto, nosso objetivo será obter um par de amigos fortes.

Os Lemas 7 e 8 provam importantes resultados que são utilizados nas provas dos Lemas 9, 10 e 11. Estes três lemas nos fornecem as principais características dos pares de amigos fortes. Definimos então um par fraterno como sendo um par de vértices que possui essas

características. Em outras palavras, um par fraterno seria um candidato a par forte, já que possui alguns de seus aspectos principais.

O Lema 12 prova que há o casamento dos \mathbf{Z} -vértices introduzidos entre um par de amigos fortes. O Lema 13 prova que se há casamento dos \mathbf{Z} -vértices introduzidos entre um par de vértices fraternos (não necessariamente amigos), então obtemos um par de amigos fortes.

Os Lemas 12 e 13 resolvem o nosso problema, nos fornecendo um método para obtenção de pares de amigos fortes em grafos planares perfeitos. Para provar a conjectura de B. Reed, basta provar que esse método é polinomial.

O Lema 14 prova que é polinomial obter pares de amigos e inimigos nas folhas de T da classe \mathbf{L} , incluindo ou não \mathbf{Z} -vértices. Para provar isso, nós observamos que a introdução dos \mathbf{Z} -vértices alteram ligeiramente as características da classe \mathbf{L} , mas, por um teorema de F. Harary e C. Holzmann[7], tais folhas são grafos linha de bipartite. Mas, um teorema de S. Hougardy[9] prova que é polinomial obter pares de amigos e inimigos em grafos linha de bipartite.

Com isso, o Lema 15 prova que é polinomial obter, ou afirmar que não existem, pares de amigos em grafos planares perfeitos introspectivos. Finalmente, o Teorema Principal prova a conjectura de B. Reed para os grafos planares perfeitos em geral.

3.2 Introspecção

Seja T a árvore de decomposição de Hsu sobre o grafo G . Seja Q um corte de H , onde H é um nó de T , e H_1, \dots, H_k os filhos de H em T .

Lema 1 *Um par de amigos (inimigos) de vértices não artificiais em uma folha de T , também é par de amigos (inimigos) do grafo original G .*

Prova: Suponhamos que exista um par de amigos $\{x, y\}$ em H_i . Se Q é do tipo **I**, **II-a** ou **III-a**, não há caminhos induzidos entre x e y que usam vértices de outras componentes.

3. Pares de Amigos em Grafos Planares Perfeitos

Se Q é do tipo **II-b**, **II-c**, **III-b**, **III-c** ou **IV**, todos os caminhos induzidos entre quaisquer dois vértices do corte têm paridade igual àquela do caminho incluindo os vértices artificiais de Hsu em H_i . Logo $\{x,y\}$ é um par de amigos em H . Se H não é raiz de T , o mesmo raciocínio pode ser aplicado, e assim sucessivamente. O resultado é análogo para os pares de inimigos. \square

Lema 2 *Se H possui um corte tipo **I**, **II-b**, **III-b**, **III-c** ou **IV**, então H possui um par de amigos. Se H possui um corte tipo **II-c**, **III-c** ou **IV**, então H possui um par de inimigos.*

Prova: Se H possui um corte tipo **I**, é fácil ver que H contém um par de amigos (Dois vértices em componentes diferentes com arestas para a articulação). Os outros resultados são consequência das definições dos cortes. \square

Em [10], W. L. Hsu prova o Teorema 1 abaixo que caracteriza pares de amigos em grafos das classes **L** e **C**.

Teorema 1 *Em um grafo da classe **C**, se x e y não são C_4 -vértices, então $\{x,y\}$ é um par de amigos ou um par de inimigos. Em um grafo 3-conexo da classe **L**, se x e y são adjacentes a um vértice comum de grau 2, então $\{x,y\}$ é um par de amigos. Caso contrário, $\{x,y\}$ não é um par de amigos [10].*

Prova: Ver teoremas 9.2 e 9.3 em [10]. \square

Lema 3 *Seja H uma folha de T , onde $|V(H)| > 2$ e H pertence a classe **S** ou **C**. Logo, H possui um par de amigos não artificiais.*

Prova: Se em H de qualquer classe, houver algum vértice artificial introduzido por um corte Q do tipo **II-b**, **III-b**, **III-c** ou **IV**, então $Q \subset V(H)$, e pelo Lema 2, H possui um par de amigos. Assumamos então que, se existe algum vértice artificial em H , este foi

3. Pares de Amigos em Grafos Planares Perfeitos

adicionado por um corte do tipo **II-c**, e portanto, todos os vértices artificiais têm grau 2. Se H pertence a classe **S**, é fácil obter dois vértices de grau maior que 2 (ou seja, não artificiais) em H que formam um par de amigos.

Suponha agora que H pertence a **C**. Assuma que H contém um C_4 -vértice v cuja vizinhança é o C_4 induzido $\{a, b, c, d\}$, com arestas ab, bc, cd e da . É fácil ver que a, b, c e d possuem pelo menos grau 3 e, por isso, são não artificiais. Se nenhum desses vértices é um C_4 -vértice, então $\{a, c\}$ e $\{b, d\}$ são pares de amigos pelo Teorema 1, devido aos caminhos induzidos avc e bvd de tamanho 2. Se algum deles for um C_4 -vértice, sem perda de generalidade a , temos então o C_4 induzido $\{b, v, d, u\}$ como vizinhança de a , com arestas bv, vd, du e ub .

Logo a vizinhança de b contém os vértices a, v, c e u . Se b ou d também é um C_4 -vértice, então teremos obrigatoriamente a aresta uc . Neste caso, obtemos um grafo da classe **C** onde todos os vértices são C_4 -vértices, e por isso, esse grafo não pode ter mais vértices, como ilustrado na Figura 3.1. Esse grafo possui os pares de amigos $\{a, c\}$, $\{b, d\}$ e $\{u, v\}$. Se nem b nem d são C_4 -vértices então, pelo Teorema 1, $\{b, d\}$ é um par de amigos, pois existe um caminho par entre eles.

Se H não possui um C_4 -vértice, pela definição da classe **C**, H é um grafo bipartite. Logo, os vértices de uma mesma partição de H formam pares de amigos entre si. Se H não contém vértices artificiais, como $|V(H)| > 2$, então H possui pares de amigos não artificiais. Se H possui vértices artificiais, introduzidos por um corte $\{r, s\}$ do tipo **II-c**, então r forma um par de amigos com um vizinho t não artificial de s , já que r e t devem pertencer a mesma partição, e existe t (pois as folhas são 3-conexas). Ver Figura 3.1. \square

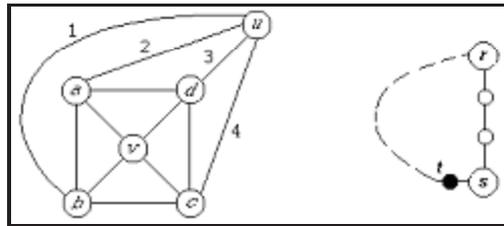


Figura 3.1. Auxílio à prova do Lema 3

3. Pares de Amigos em Grafos Planares Perfeitos

Com esses Lemas podemos chegar a algumas conclusões. Se G é um grafo completo, então G não possui pares de amigos. Consideremos então que G não é completo. Os Lemas 1 e 2 nos dizem que se, durante o processo de decomposição de G , ocorreram cortes dos tipos **I**, **II-b**, **III-b**, **III-c** ou **IV**, então G possui um par de amigos. Por outro lado, pelo Lema 3, se a árvore de decomposição T de G possui folhas das classes **S** ou **C**, então G possui um par de amigos. Também, pelo Lema 1 e pelo Teorema 1, se a árvore de decomposição T de G possui folhas pertencentes à classe **L** com algum vértice de grau 2 adjacente a vértices não artificiais, então G possui um par de amigos.

Definição 3.1 Dizemos que um grafo G , com árvore de decomposição T , é introspectivo se as seguintes condições são satisfeitas:

- G é planar perfeito e não é completo;
- T só possui cortes dos tipos **II-a**, **II-c** e **III-a**;
- T só possui folhas da classe $\mathbf{L} \cup \{K_3, K_4\}$;
- A vizinhança fechada dos vértices u não-artificiais das folhas de T , exceto K_3 e K_4 , induz um dos grafos ilustrados na Figura 3.2.

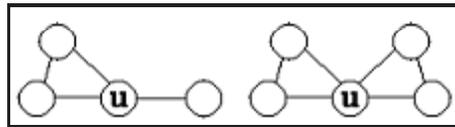


Figura 3.2. Vizinhança nas folhas **L** de um grafo introspectivo

3.3 Separação de Amigos

Pelos Lemas anteriores, se um grafo G é introspectivo, ainda não é possível saber se G possui ou não um par de amigos. Nosso problema então se resume a identificar pares de amigos que foram separados pelos cortes **II-a**, **II-c** e **III-a**.

3. Pares de Amigos em Grafos Planares Perfeitos

Definimos $P(a, b, c, D)$ como sendo o conjunto de todos os caminhos induzidos de a para b que não contém c no grafo D . Observe que se $P(a, b, c, D)$ é vazio, então c é uma articulação de D .

Seja H um grafo 2-conexo e $\{x, y\}$ um par de amigos de H . Seja $\{a, b\}$ um corte de H do tipo **II-a** ou **II-c** que separa x de y . Seja H_X (resp. H_Y) o filho de H em T que contém x (resp. y). Temos então que os conjuntos $P(x, a, b, H_X)$, $P(x, b, a, H_X)$, $P(y, a, b, H_Y)$ e $P(y, b, a, H_Y)$ não são vazios, já que H é 2-conexo.

Lema 4 *Se $\{x, y\}$ em H é um par de amigos separados por um corte Q do tipo **II-a** e H_X e H_Y não contém pares de amigos, então todos os caminhos em $P(x, a, b, H_X)$ e em $P(x, b, a, H_X)$ possuem paridade ímpar. Se $\{x, y\}$ em H é um par de amigos separados por um corte Q do tipo **II-c** e H_X e H_Y não contém pares de amigos, então todos os caminhos em $P(x, a, b, H_X)$ e em $P(x, b, a, H_X)$ possuem a mesma paridade, par ou ímpar, e $H - Q$ possui apenas 2 componentes.*

Prova: Seja um caminho induzido M em $P(x, a, b, H_X)$. Como $\{x, y\}$ é um par de amigos, todos os caminhos induzidos de $P(y, a, b, H_Y)$ possuem a mesma paridade de M , senão existiria um caminho induzido ímpar entre x e y . Seja N um caminho induzido de $P(y, a, b, H_Y)$. Pelo mesmo motivo, todos os caminhos de $P(x, a, b, H_X)$ possuem a mesma paridade de N , que é a mesma de M . Logo todos os caminhos induzidos de $P(x, a, b, H_X)$ e $P(y, a, b, H_Y)$ possuem a mesma paridade e, analogamente, todos os caminhos induzidos de $P(x, b, a, H_X)$ e $P(y, b, a, H_Y)$ possuem a mesma paridade.

Seja Q do tipo **II-a** ou **II-c**. Se a paridade dos caminhos em $P(x, a, b, H_X)$ é par e em $P(x, b, a, H_X)$ é ímpar, então $\{x, a\}$ é um par de amigos. Por outro lado, se a paridade dos caminhos em $P(x, a, b, H_X)$ é ímpar e em $P(x, b, a, H_X)$ é par, então $\{x, b\}$ é um par de amigos. Ambos os casos contradizem o fato de H_X não possuir pares de amigos.

Concentremo-nos no caso de cortes Q do tipo **II-c** em que os caminhos em $P(x, a, b, H_X)$ e em $P(x, b, a, H_X)$ possuem a mesma paridade par ou ímpar. Suponhamos que $H - Q$ possui mais de 2 componentes. Chamaremos de H_Z uma outra componente de H , $H_Z \neq H_X$ e $H_Z \neq H_Y$.

3. Pares de Amigos em Grafos Planares Perfeitos

Neste caso teríamos um caminho induzido ímpar entre x e y formado da seguinte maneira: qualquer caminho induzido de x para a evitando b em H_X , qualquer caminho induzido de a para b em H_Z e qualquer caminho induzido de b para y evitando a em H_Y . Chegamos a uma contradição, já que $\{x, y\}$ é um par de amigos.

Concentremo-nos agora no caso de cortes Q do tipo **II-a** em que a paridade dos caminhos em $P(x, a, b, H_X)$ e em $P(x, b, a, H_X)$ é par. Se $\{x, a\}$ não é um par de amigos em H_X , então existe um caminho induzido ímpar em H_X de x para a passando por b . Seja $L_{XB} + (a, b)$ esse caminho, onde L_{XB} é o trecho de x para b . Obviamente, L_{XB} é par (pois pertence a $P(x, b, a, H_X)$).

Se $\{y, b\}$ não é um par de amigos em H_Y , então existe um caminho induzido ímpar em H_Y de y para b passando por a . Seja $L_{YA} + (a, b)$ esse caminho, onde L_{YA} é o trecho de y para a . Obviamente, L_{YA} é par (pois pertence a $P(y, a, b, H_Y)$, que tem a mesma paridade de $P(x, a, b, H_X)$).

Logo $L_{XB} + (a, b) + L_{YA}$ é um caminho induzido ímpar de x a y em H . Obtemos assim uma contradição visto que $\{x, y\}$ é um par de amigos (ver Figura 3.3). Logo, H_X ou H_Y possuirá um par de amigos. Logo, a única possibilidade para H_X ou H_Y não possuírem um par de amigos, quando forem gerados por cortes do tipo **II-a**, é se todos os caminhos induzidos em $P(x, a, b, H_X)$ e em $P(x, b, a, H_X)$ tiverem paridade ímpar. \square

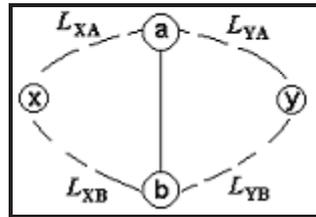


Figura 3.3. Auxílio às explicações do Lema 4

Observe que no Lema 4, x pode ser substituído por y , para se obter as paridades dos caminhos em $P(y, a, b, H_Y)$ e $P(y, b, a, H_Y)$ em cortes do tipo **II-a** e **II-c**.

Agora trataremos os cortes do tipo **III-a** (triângulos). Seja G um grafo planar perfeito e T a sua árvore de decomposição.

3. Pares de Amigos em Grafos Planares Perfeitos

Lema 5 *Seja $\{a, b, c\}$ um triângulo de um grafo 3-conexo H qualquer. Logo todo vértice x de H diferente de $\{a, b, c\}$ possui pelo menos um caminho induzido para a evitando b e c , para b evitando a e c , e para c evitando a e b , todos internamente disjuntos.*

Prova: Pelo teorema de Menger, em um grafo k -conexo, existem k caminhos internamente disjuntos entre qualquer par de vértices. Logicamente, esses caminhos internamente disjuntos contém caminhos induzidos disjuntos.

Como H é 3-conexo, então existem 3 caminhos induzidos internamente disjuntos de x para a . Logicamente um deles evita b e c . Seja P_A esse caminho. Pelo mesmo motivo, existem 3 caminhos induzidos internamente disjuntos de x para b . Logicamente, um deles evita c e é internamente disjunto de P_A , pois P_A+b induz um caminho induzido de x para b . Seja P_B esse caminho. Como P_A+c e P_B+c são caminhos induzidos internamente disjuntos de x para c , então existe um caminho P_C de x a c internamente disjunto de P_A e P_B . \square

Agora defina $P(a, b, c, d, E)$ como sendo o conjunto de todos os caminhos induzidos de a para b que não contém c e d no grafo E .

Lema 6 *Seja H um grafo biconexo que possui um corte $Q = \{a, b, c\}$ do tipo **III-a**. Seja $\{x, y\}$ um par de amigos de H separado por Q , e H_X e H_Y as componentes filhas de H que contêm x e y , respectivamente. Se nem H_X nem H_Y contêm pares de amigos, então todos os caminhos em $P(x, a, b, c, H_X)$, $P(x, b, a, c, H_X)$ e $P(x, c, a, b, H_X)$ possuem paridade ímpar.*

Prova: De forma semelhante à prova do Lema 4, todos os caminhos em $P(x, a, b, c, H_X)$ e $P(y, a, b, c, H_Y)$ possuem a mesma paridade. Analogamente para $P(x, b, a, c, H_X)$ e $P(y, b, a, c, H_Y)$, e para $P(x, c, a, b, H_X)$ e $P(y, c, a, b, H_Y)$. Consideremos as seguintes possibilidades com respeito as paridades dos caminhos em $P(x, a, b, c, H_X)$, $P(x, b, a, c, H_X)$ e $P(x, c, a, b, H_X)$: (i) Par-Ímpar-Ímpar; (ii) Par-Par-Ímpar; (iii) Par-Par-Par; e (iv) Ímpar-Ímpar-Ímpar, sem perda de generalidade.

Se ocorre o caso (i) Par-Ímpar-Ímpar, temos que H_X e H_Y contêm um par de amigos, mais especificamente, $\{x, a\}$ e $\{y, a\}$. Se ocorre o caso (ii) Par-Par-Ímpar, temos que

3. Pares de Amigos em Grafos Planares Perfeitos

$\{x, a\}$ ou $\{y, b\}$ formam pares de amigos, senão teríamos um caminho induzido ímpar $xbay$ de x a y .

Concentremo-nos então no caso (iii) Par-Par-Par. Consideremos os seguintes conjuntos $P(x, a, b, c, H_X)$, $P(x, b, a, c, H_X)$, $P(x, c, a, b, H_X)$, $P(y, a, b, c, H_Y)$, $P(y, b, a, c, H_Y)$ e $P(y, c, a, b, H_Y)$. Se algum deles for vazio, nós teríamos um 2-corte $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ ou $\{b, c\}$, separando x do outro vértice do triângulo.

Mas então, não teríamos o caso Par-Par-Par, e além disso, x formaria um par de amigos com um dos vértices do triângulo (que é não artificial, pois tem grau maior que 2). Logo esses conjuntos não são vazios.

Como $\{x, b\}$ não é um par de amigos, então existe um caminho induzido L_{XAB} (de x a b por a evitando c) ou L_{XCB} (de x a b por c evitando a). Sem perda de generalidade, tomemos L_{XCB} . Como $\{y, c\}$ não é um par de amigos, então existe um caminho induzido L_{YBC} ou L_{YAC} . L_{YBC} não é possível, senão teríamos o caminho induzido ímpar $xL_{XCB}L_{YBC}y$ entre x e y . Logo temos L_{YAC} . Como $\{x, c\}$ não é um par de amigos, então existe um caminho induzido L_{XAC} ou L_{XBC} .

Suponha que seja L_{XBC} . Como $\{y, b\}$ não é um par de amigos, então existe um caminho induzido L_{YAB} ou L_{YCB} . L_{YCB} não é possível, senão teríamos o caminho induzido ímpar $xL_{XBC}L_{YCB}y$ entre x e y . Logo temos L_{YAB} . Como $\{x, a\}$ não é par de amigos, então existe um caminho induzido L_{XBA} ou L_{XCA} . Qualquer um deles formaria um caminho induzido ímpar entre x e y , a saber: $xL_{XBA}L_{YAB}y$ e $xL_{XCA}L_{YAC}y$. Logo não pode ser L_{XBC} .

Suponha então que, ao invés de L_{XBC} , tenhamos L_{XAC} . Como $\{y, a\}$ não é par de amigos, então existe um caminho induzido L_{YBA} ou L_{YCA} . L_{YCA} não é possível, senão teríamos o caminho induzido ímpar $xL_{XAC}L_{YCA}y$ entre x e y . Logo temos L_{YBA} . Como $\{x, a\}$ não é um par de amigos, então existe um caminho induzido L_{XBA} ou L_{XCA} . L_{XCA} não é possível, senão teríamos o induzido ímpar $xL_{XCA}L_{YAC}y$ entre x e y . Logo temos L_{XBA} .

Em resumo, temos os caminhos induzidos ímpares L_{XCB} , L_{YAC} , L_{XAC} , L_{YBA} e L_{XBA} . Para que esses caminhos não formem caminhos induzidos ímpares entre x e y com ca-

3. Pares de Amigos em Grafos Planares Perfeitos

minhos induzidos de $P(y, b, a, c, H_Y)$, $P(x, c, a, b, H_X)$, $P(y, c, a, b, H_Y)$, $P(x, a, b, c, H_X)$ e $P(y, a, b, c, H_Y)$, respectivamente, então a possui arestas para todos em $P(x, c, a, b, H_X)$ e $P(y, c, a, b, H_Y)$, b para $P(x, a, b, c, H_X)$ e $P(y, a, b, c, H_Y)$, e c para $P(y, b, a, c, H_Y)$.

Esses resultados serão utilizados a seguir. Consideremos agora o grafo H_Y . Tomemos todas as componentes 2-inseparáveis de H_Y . Se y está na mesma componente do triângulo $\{a, b, c\}$, pelo Lema 5, existem os caminhos induzidos $L_{YA} \in P(y, a, b, c, H_Y)$, $L_{YB} \in P(y, b, a, c, H_Y)$ e $L_{YC} \in P(y, c, a, b, H_Y)$, internamente disjuntos. Logo, como dissemos anteriormente, existe uma aresta de a para L_{YC} , de b para L_{YA} , e de c para L_{YB} . Como (y, a) , (y, b) e (y, c) não são arestas, pois estamos considerando o caso (iii) Par-Par-Par, então o caminho induzido pelo caminho $L_{YC}+a$ é disjunto de L_{YA} e L_{YB} . Logo, deve haver uma aresta de b para $L_{YC}+a$. Como os caminhos são disjuntos, isso não é possível devido a planaridade. A Figura 3.4(a) auxilia nessas explicações.

Suponhamos então que y não está na componente 2-inseparável do triângulo. Logo, existe um 2-corte $\{u, v\}$, pertencente a componente 2-inseparável do triângulo, que separa y de $\{a, b, c\}$. Como u e v são não artificiais, então, pelo Lema 5, existem 3 caminhos induzidos internamente disjuntos de u e v para a , b e c , a saber, L_{UA} , L_{UB} e L_{UC} , L_{VA} , L_{VB} e L_{VC} . Seja ainda L_{YU} (resp. L_{YV}) um caminho induzido de y para u (resp. v) evitando v (resp. u).

Se nenhum dos caminhos induzidos L_{UA} , L_{UB} e L_{UC} passam por v , então como dissemos anteriormente, a possui uma aresta para um vértice r em $L_{YU}L_{UC}$ e c possui uma aresta para um vértice s em $L_{YU}L_{UB}$. Temos então o caminho induzido $L_{YU}(\text{sobre } L_{UC})ra$ de y para a , e então b deveria ter uma aresta para um vértice t nesse caminho. Devido a planaridade, isso só é possível se $t = u$, fazendo com que $r = s = t = u$. Temos então a 4-clique $\{u, a, b, c\}$. Assim, temos um corte triângulo que separa v de um dos vértices do triângulo $\{a, b, c\}$. Sem perda de generalidade, suponha que seja a . Logo, por planaridade, e como $L_{UA} = ua$, os caminhos induzidos $L_{YV}L_{VC}$ não possuem vértices com arestas para a , levando-nos a uma contradição.

Suponha então, sem perda de generalidade, que L_{UC} passa por v e que L_{VB} passa por u . Tomamos então L_{VC} igual ao trecho de L_{UC} a partir de v até c e L_{UB} igual ao trecho

3. Pares de Amigos em Grafos Planares Perfeitos

de L_{VB} a partir de u até b . Como dissemos anteriormente, a possui uma aresta para um vértice r em $L_{YU}L_{UC}$ e c possui uma aresta para um vértice s em $L_{YV}L_{VB}$. Temos então o caminho induzido $L_{YU}(\text{sobre } L_{UC})ra$ de y para a , e então b deveria ter uma aresta para um vértice t nesse caminho. Isso não é possível, devido a planaridade; mais explicitamente, devido a aresta (c, s) e o caminho induzido L_{UA} . Isso nos leva a uma contradição total. A Figura 3.4(b) auxilia nessas explicações. Logo, como o caso (iii) Par-Par-Par não é possível, a única possibilidade é o caso (iv) Ímpar-Ímpar-Ímpar. \square

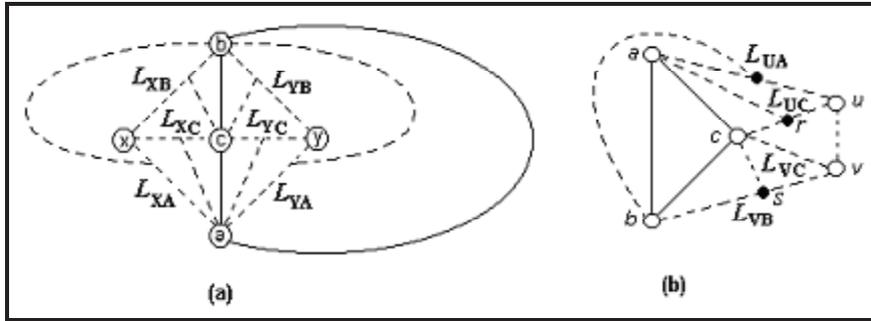


Figura 3.4. Auxílio às explicações do Lema 6

Observe que no Lema 6, x pode ser substituído por y , para se obter as paridades dos caminhos em $P(y, a, b, c, H_Y)$, $P(y, b, a, c, H_Y)$ e $P(y, c, a, b, H_Y)$ em cortes do tipo **III-a**.

Para resolver o problema de separação de um par de amigos $\{x, y\}$, os Lemas 4 e 6 nos motivam a introduzir, a cada corte, vértices artificiais que denominaremos por **Z**-vértices aos grafos H_i filhos de H em T . A introdução desses vértices será feita de tal forma que todos os seus caminhos induzidos para os vértices do corte terão a mesma paridade. A intenção é podermos identificar $\{x, z\}$ e $\{z, y\}$ como pares de amigos ou inimigos nas folhas de T , onde z é um **Z**-vértice, e concluir, de uma maneira a ser esclarecida posteriormente, que $\{x, y\}$ é um par de amigos em H .

Se $\{a, b\}$ é um corte do tipo **II-a**, adicionaremos um **Z**-vértice com arestas para a e b . Se $\{a, b\}$ é um corte do tipo **II-c**, que gerou apenas duas componentes, adicionaremos um **Z**-vértice com arestas para a e para o **A**-vértice de Hsu com aresta para a . Se $\{a, b, c\}$ é um corte tipo **III-a**, adicionaremos um **Z**-vértice com arestas para a, b e c . A Figura 3.5

ilustra essas explicações.

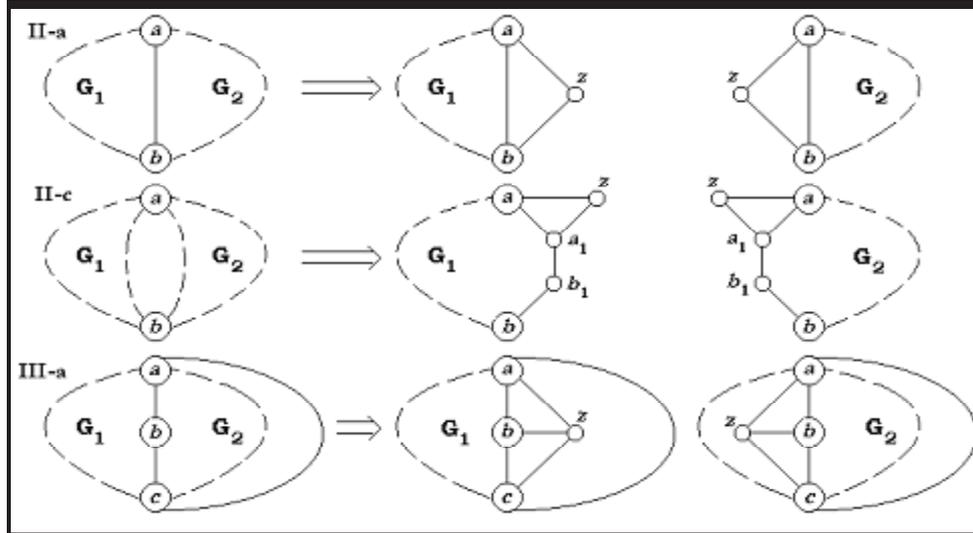


Figura 3.5. Introdução dos **Z**-vértices z em cortes **II-a**, **II-c** e **III-a**, onde a_1 e b_1 são **A**-vértices

Com um procedimento análogo àquele adotado por Hsu, nós proibiremos as folhas H_i em T geradas das componentes de $H - \{a, b\}$ isomorfas aos grafos da Figura 3.6. Ou seja, proibimos as folhas H_i isomorfas a H .

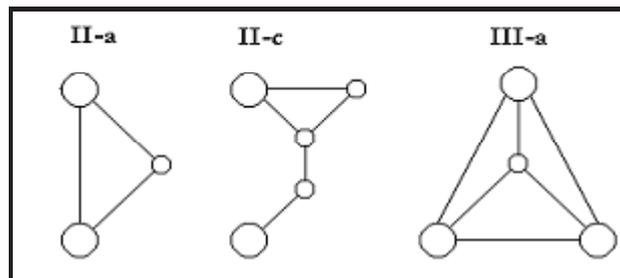


Figura 3.6. Outras componentes proibidas aos cortes do tipo **II-a**, **II-c** e **III-a**

Na Figura 3.7, exemplificamos uma tentativa para recuperar o par de amigos $\{x, y\}$ de H , obtendo inicialmente os pares de amigos (inimigos): $\{x, z_1\}$, $\{z_1, z_2\}$, $\{z_2, z_3\}$ e $\{z_3, y\}$.

Posteriormente, mostraremos como criar um grafo auxiliar \mathbf{W} , cujas arestas representam a relação de amizade ou inimizade entre pares de vértices, e a partir de \mathbf{W} , recuperar pares de amigos do grafo original. Por exemplo, poderíamos concluir que $\{x, y\}$ é um

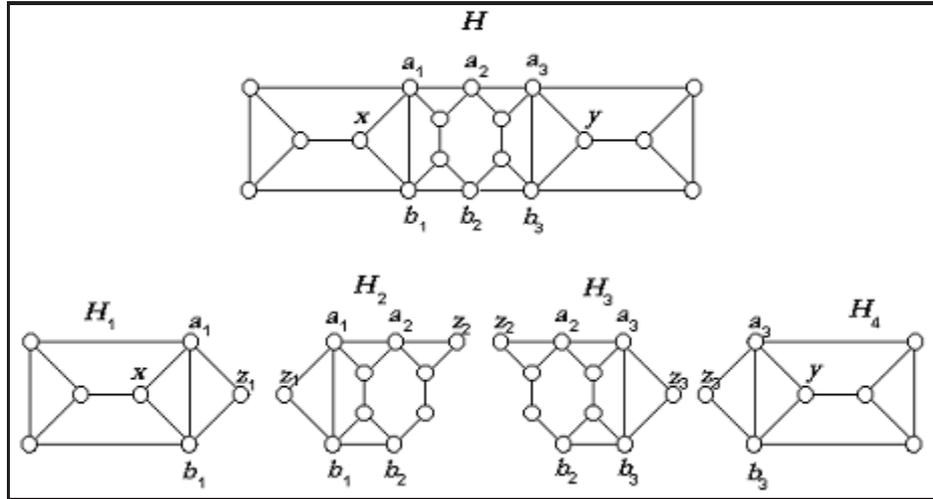


Figura 3.7. Recuperação do par de amigos $\{x, y\}$ através de \mathbf{Z} -vértices

par de amigos se \mathbf{W} respeitasse certas condições e contivesse as seguintes arestas: (x, z_1) , (z_1, z_2) , (z_2, z_3) e (z_3, y) , ou seja, um caminho de x a y em \mathbf{W} , satisfazendo algumas condições que serão vistas a seguir.

3.4 Amigos Fortes

Os Lemas apresentados até o momento irão nos ajudar a obter um par de amigos de G , se este existir, ou declarar que G não possui pares de amigos. Seja T a árvore de decomposição de G , e u e v dois vértices de G . Seja L_{UV} o conjunto dos vértices que formam um menor caminho entre u e v em G . Seja $H(u, v)$ a seqüência $\{H_0, H_1, \dots, H_k\}$ minimal de folhas de T tal que $L_{UV} \subseteq \cup_{i=0}^k V(H_i)$, $u \in V(H_0)$, $v \in V(H_k)$ e, se $i < j$, o menor caminho de u para qualquer vértice em $V(H_i)$ é menor ou igual que para qualquer vértice em $V(H_j)$ (ou seja, as folhas de $H(u, v)$ estão em seqüência). Analogamente, definimos $Q(u, v)$ como sendo a seqüência $\{Q_0, \dots, Q_{k-1}\}$ de cortes, onde Q_i separa as folhas H_i e H_{i+1} pertencentes a $H(u, v)$.

A seqüência $H(u, v)$ existe e é única, senão G seria desconexo ou os cortes que separam quaisquer duas folhas consecutivas de $H(u, v)$ não seriam cortes de G .

Observe que se G possui pares de amigos, então existe um par de amigos $\{x, y\}$

3. Pares de Amigos em Grafos Planares Perfeitos

de G tal que não existe nenhum par de amigos $\{x', y'\}$ com $x' \in \{H_0, \dots, H_k\}$ e $y' \in \{H_1, \dots, H_{k-1}\}$, onde $H(x, y) = \{H_0, \dots, H_k\}$.

Definição 3.2 Dizemos que um par de vértices $\{x, y\}$ de um grafo G é forte se as seguintes condições são satisfeitas:

- a. G é introspectivo;
- b. Não existe nenhum par de amigos $\{x', y'\}$ com $x' \in \{H_0, \dots, H_k\}$ e $y' \in \{H_1, \dots, H_{k-1}\}$, onde $H(x, y) = \{H_0, \dots, H_k\}$.

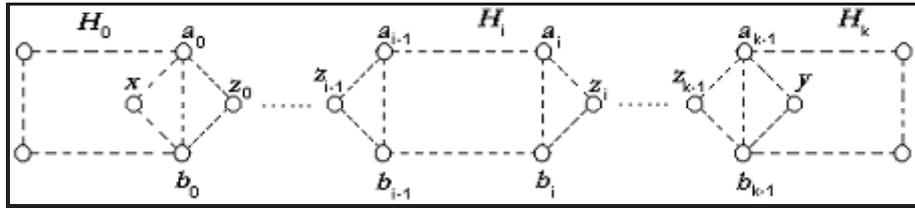


Figura 3.8. Exemplo da seqüência $H(x, y) = \{H_0, \dots, H_k\}$

Nosso trabalho, então, concentrar-se-á na obtenção de pares de amigos fortes. Se não formos capazes de obter nenhum par de amigos fortes, então G não possui pares de amigos. Os Lemas a seguir vão nos auxiliar nessa questão.

Lema 7 Seja $\{x, y\}$ um par de amigos de G , separados por um corte Q tal que todos os caminhos induzidos de x e y a qualquer um dos vértices de Q evitando os demais possuem a mesma paridade ímpar. Se $Q = \{a, b\}$ é do tipo **II-a**, então um dos quatro grupos a seguir é tal que cada um dos seus pares forma um par de inimigos ou uma aresta: 1). $\{x, a\}$ e $\{y, a\}$; 2). $\{x, b\}$ e $\{y, b\}$; 3). $\{x, a\}$ e $\{x, b\}$; ou 4). $\{y, a\}$ e $\{y, b\}$. Se Q é do tipo **III-a**, então x ou y forma uma aresta ou um par de inimigos com um dos vértices de Q .

Prova: Inicialmente, consideremos Q do tipo **II-a**. Na demonstração do Lema 4, foi provado que, no caso Par-Par, $\{x, a\}$ ou $\{y, b\}$ (analogamente $\{x, b\}$ ou $\{y, a\}$) é um par

3. Pares de Amigos em Grafos Planares Perfeitos

de amigos. Temos então que pelo menos um dos seguintes pares são pares de amigos: $\{x, a\}$ e $\{y, a\}$, $\{x, b\}$ e $\{y, b\}$, $\{x, a\}$ e $\{x, b\}$, ou $\{y, a\}$ e $\{y, b\}$. A demonstração é análoga para o caso Ímpar-Ímpar de que pelo menos um dos seguintes pares são pares de inimigos ou arestas: 1). $\{x, a\}$ e $\{y, a\}$; 2). $\{x, b\}$ e $\{y, b\}$; 3). $\{x, a\}$ e $\{x, b\}$; ou 4). $\{y, a\}$ e $\{y, b\}$.

Consideremos agora Q do tipo **III-a**. Na demonstração do Lema 6, foi provado que, no caso Par-Par-Par, x ou y forma um par de amigos com um dos vértices do corte (senão teríamos um problema de planaridade). Analogamente, pode-se demonstrar que, para o caso Ímpar-Ímpar-Ímpar, x ou y forma uma aresta ou um par de inimigos com um dos vértices do corte. \square

Lema 8 *Seja H uma folha de T , onde $H[V(H) - \mathbf{Z}(H)]$ pertence a classe **L**. Seja $\{a, b, c\}$ um triângulo de H . Se H não possui pares de amigos não artificiais, então nenhum vértice não artificial de H possui todos os caminhos induzidos com a mesma paridade para a evitando b e c , para b evitando a e c , e para c evitando a e b .*

Prova: Seja H' o grafo formado por $H[V(H) - \mathbf{Z}(H) - \mathbf{A}(H)]$, introduzindo arestas entre os vértices de cortes do tipo **II-c**. Logicamente, H' é 3-conexo, pois $H[V(H) - \mathbf{Z}(H)]$ é 2-inseparável.

Seja x um vértice não artificial de H' não adjacente a $\{a, b, c\}$. Pelo Teorema 1, como H' não possui pares de amigos, todo vértice de H' possui a vizinhança como mostrada na Figura 3.2. Pelo Lema 5, existem os caminhos induzidos internamente disjuntos P_A de x para a evitando b e c , P_B de x para b evitando a e c , e P_C de x para c evitando a e b . Sejam r, s e t vértices na vizinhança de x , tais que $r \in P_A$, $s \in P_B$, $t \in P_C$ e, sem perda de generalidade, (s, t) é uma aresta, mas (r, s) não. Suponha por absurdo que P_A e P_B possuem a mesma paridade. Logo, deve haver uma aresta de P_A para P_B senão teríamos um ciclo induzido ímpar xP_AabP_Bx . P_A e P_B não podem ser vazios, visto que (r, s) não é uma aresta. Sem perda de generalidade, P_A não é vazio. Seja v um vértice de $P_A - \{x\}$ com aresta para um vértice w em P_B . Como v pertence a P_A , então um vizinho u de v em

3. Pares de Amigos em Grafos Planares Perfeitos

P_A deve ligar-se a w , para não quebrar a vizinhança de v . Logicamente u existe, senão P_B não seria induzido ou teríamos o ciclo induzido ímpar citado. Também $w \neq x$, senão P_A não seria induzido.

Se $w \neq b$, então temos os vértices p e q vizinhos a w em P_B . Como $\{u, v, w\}$ formam um triângulo, e P_A e P_B são disjuntos, $\{w, p, q\}$ deve formar um triângulo também, para manter a estrutura de vizinhança da classe **L**. A aresta (p, q) contradiz o fato de P_B ser induzido. A Figura 3.9 auxilia nessas explicações.

Se $w = b$, então temos dois casos. Se $u = x$ então quebra-se a vizinhança de x com o diamante $\{x, b, v, t\}$, já que $u = x$ é adjacente a $w = b$. Se $u \neq x$ então quebra-se a vizinhança de b com a estrutura $\{a, b, c, u, v, p\}$.

Esse resultado obtido para H' também é válido para H . Isso porque se P_A , P_B ou P_C em H' contêm uma aresta entre vértices de cortes do tipo **II-c**, basta trocá-la pelo caminho entre eles formado por **A**-vértices em H . Também v e w não podem ser **A**-vértices, pois têm grau maior que 2. Além disso, como já dito, os **Z**-vértices são acoplados em arestas e, por isso, não alteram as paridades dos caminhos induzidos entre os outros vértices. \square

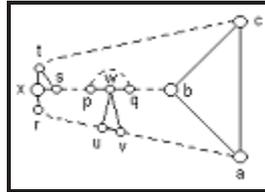


Figura 3.9. Auxílio às explicações do Lema 8

Lema 9 *Seja $\{x, y\}$ um par de amigos fortes de G , $H(x, y) = \{H_0, \dots, H_k\}$ e $Q(x, y) = \{Q_0, \dots, Q_{k-1}\}$. Se Q_0 (resp. Q_{k-1}) é do tipo **II-a** ou **III-a**, então H_0 (resp. H_k) possui um vértice adjacente a todos os vértices de Q_0 (resp. Q_{k-1}).*

Prova: Se Q_0 (resp. Q_{k-1}) é do tipo **III-a**, então, pelos Lemas 6 e 8, H_0 (resp. H_k) não pertence a classe **L**. Logo H_0 (resp. H_k) é isomorfo ao K_4 , e portanto, possui um vértice adjacente a todos os vértices de Q_0 (resp. Q_{k-1}).

3. Pares de Amigos em Grafos Planares Perfeitos

Se $Q_0 = \{a, b\}$ é do tipo **II-a**, então, pelo Lema 7: ou 1. x forma um par de inimigos com a e/ou b ; ou 2. y forma par de inimigos com a e b . Suponha que ocorra a segunda opção.

Seja M um caminho induzido de y para a evitando b . Como $\{y, a\}$ é par de inimigos, então M é ímpar. O caminho $M + (a, b)$ de y para b não pode ser induzido, pois $\{y, b\}$ também é par de inimigos. Logo há uma aresta de M para b , formando um caminho induzido N de y para b evitando a . O caminho $N + (b, a)$ de y para a também não pode ser induzido. Logo há uma aresta de N para a . Como M é induzido, isso só seria possível se a e b fossem adjacentes a um vértice comum. Mas nesse caso, $\{x, y\}$ deixaria de ser forte, já que x formaria um par de amigos com tal vértice.

Logo, ocorre apenas a primeira opção. Seja então $\{x, a\}$ um par de inimigos. Como H_0 pertence a classe **L**, pelo Teorema 1, (x, a) é uma aresta. Como $\{x, y\}$ é forte, pelo Lema 4, todos os caminhos induzidos de x a b evitando a são ímpares. Como H_0 é 3-conexo, existem pelo menos dois caminhos disjuntos, U e V de x para b evitando a . Para que U e V não formem buracos ímpares com as arestas (x, a) e (a, b) , a deve possuir arestas para r em U e s em V . Pela estrutura de vizinhança da classe **L** (ver Figura 3.2), b deve ser adjacente a r ou s . Obtemos assim um vértice adjacente a todos os vértices de Q_0 . A Figura 3.10 auxilia nessas explicações. O resultado para Q_{k-1} é análogo. \square

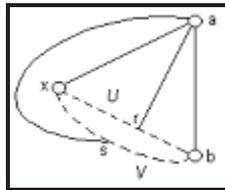


Figura 3.10. Auxílio às explicações do Lema 9

Lema 10 *Seja $\{x, y\}$ um par de amigos fortes de G , $H(x, y) = \{H_0, \dots, H_k\}$ e $Q(x, y) = \{Q_0, \dots, Q_{k-1}\}$. Então os cortes $\{Q_1, \dots, Q_{k-2}\}$ não podem ser do tipo **II-a** nem **III-a**. Ou seja, apenas Q_0 e Q_{k-1} podem ser dos tipos **II-a** e **III-a**.*

3. Pares de Amigos em Grafos Planares Perfeitos

Prova: Por absurdo, suponhamos que Q_i ($0 < i < k - 1$) é do tipo **II-a** ou **III-a**. Pelo Lema 7, x ou y forma uma aresta ou um par de inimigos com um dos vértices de Q_i . Não pode ser aresta visto que $0 < i < k - 1$. Sem perda de generalidade, x forma um par de inimigos com o vértice u de Q_i . Pelos Lemas 4 e 6, todos os caminhos induzidos de x para um vértice de Q_i evitando os demais são ímpares. Como $\{x, u\}$ é um par de inimigos, então não existem caminhos induzidos de x para u passando por outro vértice de Q_i . Logo todos os caminhos induzidos de x para Q_i passam pelos vizinhos de u não pertencentes a Q_i . Como H_i é uma folha da classe **L**, u possui uma vizinhança igual a da Figura 3.2. Se u e outro vértice de Q_i são adjacentes a um vértice comum v não pertencente a Q_i , então v formaria um par de amigos com y , contradizendo o fato de $\{x, y\}$ ser forte. Logo, pela estrutura de vizinhança de u , temos um 2-corte $\{u_1, u_2\}$ em H_i do tipo **II-a** formado por vértices adjacentes a u , separando x dos vértices de Q_i . Como $\{x, u\}$ é um par de inimigos, então existem caminhos induzidos pares de x para u_1 (resp. u_2) evitando u_2 (resp. u_1). Como $\{x, y\}$ é forte, pelo Lema 4, aplicado ao corte $\{u_1, u_2\}$ do tipo **II-a**, esses caminhos devem ser ímpares. Temos assim uma contradição. Ver Figura 3.11. \square

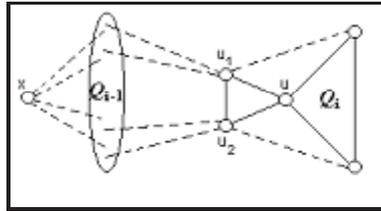


Figura 3.11. Auxílio às explicações do Lema 10

Lema 11 *Seja $\{x, y\}$ um par de vértices fortes de G e $Q_i = \{a, b\} \in Q(x, y)$ um corte do tipo **II-c** que separou x e y . Então $\{x, y\}$ forma um par de amigos se e somente se nenhuma outra folha de T , além de H_i e $H_{i+1} \in H(x, y)$, possui Q_i . Ou seja, se e somente se Q_i gerou apenas duas componentes.*

Prova: (\Rightarrow) Pelo Lema 4, se $\{x, y\}$ é um par de amigos, então Q_i gerou apenas duas componentes.

(\Leftarrow) Suponha então que Q_i gerou apenas duas componentes.

Os possíveis caminhos induzidos ímpares de x a y , são do tipo: $xaH_i by$ e $xaH_{i+1}by$. Pela estrutura de vizinhança da classe **L** (ver Figura 3.2), a vizinhança de a e b devem ser um vértice ou uma aresta. Em ambos os casos, os caminhos citados não têm como serem induzidos. Como $\{x, y\}$ é forte, então, pelo Lema 4, todos os caminhos induzidos de x e y para a e b possuem a mesma paridade. Logo todos os caminhos induzidos de x a y são pares. \square

3.5 Amigos Fraternos

Os Lemas anteriores nos dizem as características principais de um par de amigos fortes. Seja $\{x, y\}$ um par de vértices de G e $H(x, y) = \{H_0, \dots, H_k\}$ e $Q(x, y) = \{Q_0, \dots, Q_{k-1}\}$ como definidos anteriormente.

Definição 3.3 Dizemos que um par de vértices $\{x, y\}$ é fraterno se as seguintes condições são satisfeitas:

- a. Os cortes $\{Q_1, \dots, Q_{k-2}\}$ são todos do tipo **II-c** [Lema 10];
- b. Os cortes $\{Q_1, \dots, Q_{k-2}\}$ geraram apenas duas componentes [Lema 11].
- c. Se Q_0 (resp. Q_{k-1}) são do tipo **II-a** ou **III-a**, então existe um vértice de H_0 (resp. H_k) adjacente a todos os vértices de Q_0 (resp. Q_{k-1}) [Lema 9];

Já foi observado que se existe um par de amigos em G , existe um que é forte, e pelos Lemas 9, 10 e 11, é também fraterno.

Um par de vértices fraternos não necessariamente forma um par de amigos de G . Veremos a seguir quais as condições que um par de vértices fraternos precisa ter para ser um par de amigos de G .

3.6 Recuperação de Amigos Fortes

A partir de agora, iremos fazer o uso dos \mathbf{Z} -vértices, introduzidos conforme especificado anteriormente. Seja um par de vértices fraternos $\{x, y\}$, e $H(x, y) = \{H_0, \dots, H_k\}$ e $Q(x, y) = \{Q_0, \dots, Q_{k-1}\}$ como definidos anteriormente. Definimos ainda $\mathbf{Z}(x, y) = \{z_0, \dots, z_{k-1}\}$, onde $z_i \in \mathbf{Z}(x, y)$ foi adicionado a H_i e H_{i+1} com o corte Q_i .

Lema 12 *Seja $\{x, y\}$ um par de amigos fortes de G . Logo, $\{x, z_0\}$, $\{z_{k-1}, y\}$ e cada par $\{z_{i-1}, z_i\}$ em H_i , $0 < i < k$, formam pares de amigos ou inimigos. Além disso, o número de pares de inimigos é par.*

Prova: Pelo Lema 4, todos os caminhos induzidos de x e y para um vértice de Q_i (e Q_{i+1}) evitando os demais possuem a mesma paridade. Em H_i , z_i simula todos os caminhos induzidos de x para Q_i e z_{i+1} simula todos os caminhos induzidos de y para Q_{i+1} . Como todos os caminhos induzidos de z_i e z_{i+1} para Q_i e Q_{i+1} , respectivamente, possuem a mesma paridade (por construção), e como todos os caminhos induzidos entre x e y possuem a mesma paridade (pois são amigos), então todos os caminhos induzidos entre z_i e z_{i+1} possuem a mesma paridade. Logo, $\{z_i, z_{i+1}\}$ é um par de amigos ou inimigos (análogo para $\{x, z_0\}$ e $\{z_{k-1}, y\}$).

Como $\{x, y\}$ é forte, então $\{x, y\}$ é fraterno e, por isso, existe um caminho induzido entre x e y do tipo $Lxy = Lxa_0 + La_0a_1 + \dots + La_{k-1}a_k + La_ky$, onde $a_i \in Q_i$, e La_ia_{i+1} de a_i para a_{i+1} é um caminho induzido evitando os demais vértices em Q_i e em Q_{i+1} . Temos então que o caminho Lxy é induzido e deve ser par.

Se $\{z_i, z_{i+1}\}$ é um par de amigos (resp. inimigos), então La_ia_{i+1} deve ser par (resp. ímpar), visto que $(z_i, a_i) + La_ia_{i+1} + (a_{i+1}, z_{i+1})$ é um caminho induzido de z_i para z_{i+1} . Como Lxy é par, devemos ter um número par de caminhos La_ia_{i+1} ímpares. Logo, devemos ter um número par de pares de inimigos $\{z_i, z_{i+1}\}$. \square

3. Pares de Amigos em Grafos Planares Perfeitos

Lema 13 *Seja $\{x, y\}$ um par de vértices fraternos. Se $\{x, z_0\}$, $\{z_{k-1}, y\}$ e cada par $\{z_{i-1}, z_i\}$ em H_i , $0 < i < k$, formam pares de amigos ou inimigos, e o número de pares de inimigos é par, então existem vértices $r \in H_0$ e $s \in H_k$, tais que $\{r, s\}$ forma um par de amigos de G .*

Prova: Se Q_0 (resp. Q_{k-1}) são do tipo **II-a** ou **III-a**, pelo item (c) da Definição 3.3 de par fraterno, existe um vértice de H_0 (resp. H_k) adjacente a todos os vértices de Q_0 (resp. Q_{k-1}). Sejam $r \in H_0$ e $s \in H_k$, esses vértices. Nesse caso não existem caminhos induzidos de r para s passando por dois vértices de Q_0 ou Q_{k-1} . Se Q_0 (resp. Q_{k-1}) não são do tipo **II-a** ou **III-a**, façamos $r = x$ e $s = y$.

Consideremos qualquer Q_i do tipo **II-c**. Pelo item (b) da Definição 3.3 de par fraterno, Q_i gerou apenas duas componentes. Pela estrutura de vizinhança da classe **L**, Figura 3.2, a vizinhança dos vértices de Q_i em H_i e H_{i+1} devem ser um vértice ou uma aresta. Em ambos os casos, não existem caminhos induzidos de r para s passando por dois vértices de Q_i , pois um suposto caminho desse tipo não seria induzido. Em outras palavras, todos os caminhos induzidos de r para s passam apenas por um único vértice de cada Q_i .

Logo, como $\{r, z_0\}$, $\{z_{k-1}, s\}$ (por construção) e cada par $\{z_i, z_{i+1}\}$ em H_i , $0 \leq i < k$, (pelo enunciado) formam pares de amigos ou inimigos, então todos os caminhos induzidos de r para s , indiscriminadamente, possuem a mesma paridade. Ou seja, $\{r, s\}$ forma um par de amigos ou inimigos. Além disso, como o número de pares de inimigos em $\{r, z_0\}$, $\{z_{k-1}, s\}$ e cada par $\{z_i, z_{i+1}\}$ em H_i , $0 \leq i < k$, é par, então existe um caminho induzido par entre r e s . Logo, $\{r, s\}$ é um par de amigos. \square

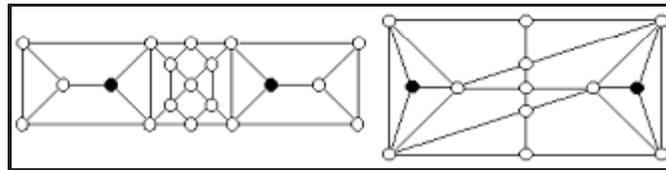


Figura 3.12. Exemplos de pares de amigos fortes

3.7 Método Polinomial

Para ser possível identificar algoritmicamente pares de vértices fraternos, faremos uma coloração sobre todos vértices envolvidos no processo de decomposição. Os **Z**-vértices inseridos por cortes **II-a** ou **III-a** terão cor branca, e os **Z**-vértices inseridos por cortes **II-c** terão cor azul. Os vértices não artificiais terão cor vermelha. Os **A**-vértices de Hsu não serão coloridos.

Seja T a árvore de decomposição de um grafo planar perfeito G . Cada corte realizado durante o processo de decomposição receberá um rótulo que o identifica dos demais cortes. Cada **Z**-vértice z introduzido receberá o rótulo do corte que o introduziu, o qual será chamado de rótulo de z . Também daremos um rótulo distinto para cada vértice não artificial. Os **A**-vértices de Hsu não serão rotulados. Define-se então $rot(v)$ como sendo o rótulo de um vértice v , não artificial ou **Z**-vértice, de G .

Seja R_G o conjunto dos rótulos de G . Ou seja, se $r_1 \in R_G$, r_1 é rótulo de algum vértice de G . Além disso, se r_2 é o rótulo de algum vértice de G , $r_2 \in R_G$.

Seja \mathbf{W} um grafo auxiliar cujo conjunto de vértices $V(\mathbf{W})$ é igual a R_G , o conjunto de rótulos de G . Um rótulo $r_1 = rot(v)$ terá em \mathbf{W} a mesma cor dada ao vértice v em G . \mathbf{W} é construído de tal forma que (r_1, r_2) é uma aresta de \mathbf{W} se e somente se existe um par de amigos ou inimigos $\{p, q\}$ em uma folha de T , tal que $r_1 = rot(p)$ e $r_2 = rot(q)$. Se $\{p, q\}$ forma um par de amigos, atribuímos custo 0 (zero) a aresta (r_1, r_2) em \mathbf{W} . Se $\{p, q\}$ forma um par de inimigos, atribuímos custo 1 (um) a aresta (r_1, r_2) em \mathbf{W} . Note que a atribuição de custo nas arestas pode ser feita sem conflito, visto que não é possível termos dois vértices com mesmo rótulo na mesma folha de T . Note ainda que a coloração dada aos vértices de \mathbf{W} também pode ser feita sem conflito, visto que **Z**-vértices com mesmo rótulo possuem a mesma cor, pois foram introduzidos pelo mesmo corte. Observe ainda que o grafo \mathbf{W} é uma árvore.

Além dos rótulos e da coloração, alguns **Z**-vértices z , logo ao serem introduzidos, serão associados a um vértice não artificial que denominaremos por $Diam(z)$. O vértice não artificial $Diam(z)$ será adjacente a todos os vértices do corte que introduziu z , ou

3. Pares de Amigos em Grafos Planares Perfeitos

seja, $N(z) \subseteq N(Diam(z))$. Se z é de cor branca, e se houver um vértice não artificial adjacente a todos os vértices do corte que introduziu z , então $Diam(z)$ será esse vértice. Caso contrário, $Diam(z)$ será vazio. Essa associação será utilizada posteriormente para identificarmos diamantes.

Obtida uma seqüência $x, z_0, \dots, z_{k-1}, y$ respeitando as condições do Lema 13, então obtemos os vértices r e s do Lema 13 da seguinte maneira: se z_0 (resp. z_{k-1}) têm cor branca, então r (resp. s) é igual a $Diam(z_0)$ (resp. $Diam(z_{k-1})$), caso contrário r (resp. s) é igual a x (resp. y).

Nosso problema agora é obter polinomialmente pares de amigos e inimigos nas folhas de T . Alguns artigos nos auxiliam nessa questão. Hsu afirma em [10], ao analisar a complexidade do seu algoritmo, que o número de 2-cortes e 3-cortes possíveis é $O(n)$. Isso implica que o número de \mathbf{Z} -vértices introduzidos também é $O(n)$. Hsu também afirma que a complexidade do seu algoritmo é $O(n^3)$. Todas essas informações serão utilizadas a seguir.

Teorema 2 *Um grafo G é linha de bipartite se e somente se G não contém buracos ímpares, diamantes, nem garras [7].*

Prova: Ver em [7]. Outras informações, ver Figura 1.1. \square

Teorema 3 *Um par de vértices $\{a, b\}$ de um grafo G linha do grafo bipartite H é um par de amigos [inimigos] se e somente se as arestas a_1a_2 e b_1b_2 em H que representam a e b , respectivamente, onde a_1 e b_1 (a_2 e b_2) pertencem a uma mesma partição de H [partições diferentes de H], são não adjacentes e ficam em diferentes componentes de $H - \{a_2, b_2\}$ ($H - \{a_1, b_1\}$) [9].*

Prova: Ver em [9]. \square

3. Pares de Amigos em Grafos Planares Perfeitos

Lema 14 *Seja H uma folha de T onde $H[V(H) - \mathbf{Z}(H)]$ pertence a classe $\mathbf{L} \cup \{K_3, K_4\}$. Logo todos os pares de amigos não artificiais de H , se existe algum, podem ser obtidos em $O(n)$. Se H não contém pares de amigos não artificiais, então todos os pares de amigos e inimigos, contendo um \mathbf{Z} -vértice, podem ser obtidos em $O(n^3)$.*

Prova: Mais uma vez, lembramos que os \mathbf{Z} -vértices não interferem nas paridades dos caminhos induzidos entre os outros vértices do grafo. O Teorema 1 nos diz que em um grafo 3-conexo da classe \mathbf{L} , se x e y são adjacentes a um vértice comum de grau 2, então $\{x, y\}$ é um par de amigos. Caso contrário, $\{x, y\}$ não é um par de amigos. Logo podemos obter todos os pares de amigos não artificiais de H , simplesmente procurando por vértices de grau 2 em $H[V(H) - \mathbf{Z}(H)]$.

Suponha agora que não existem pares de amigos não artificiais em $H[V(H) - \mathbf{Z}(H)]$. É fácil ver que a introdução dos \mathbf{Z} -vértices não adicionam buracos ímpares nem garras em H . No entanto, podem adicionar diamantes. Seja $\mathbf{D}(H) \subseteq \mathbf{Z}(H)$, o conjunto dos \mathbf{Z} -vértices que causam o aparecimento de diamantes em H , ou seja, são os \mathbf{Z} -vértices z brancos de H com $Diam(z)$ não vazio.

Logo, pelo Teorema 2, $H[V(H) - \mathbf{D}(H)]$ é linha de bipartite, e portanto todo par de vértices não adjacentes nele incluindo pelo menos um \mathbf{Z} -vértice, pode ser atestado como sendo um par de amigos ou inimigos em $O(n^3)$, pois temos $O(n^2)$ possíveis pares de vértices e, aplicando uma busca em profundidade sobre o Teorema 3, em $O(n)$ podemos verificar se tal par forma um par de amigos, visto que n é o número de arestas do grafo bipartite do qual $H[V(H) - \mathbf{D}(H)]$ é grafo linha.

Seja z um \mathbf{Z} -vértice pertencente a $\mathbf{D}(H)$. Assim, z forma um par de amigos com o seu vértice não artificial associado, $Diam(z)$. \square

3. Pares de Amigos em Grafos Planares Perfeitos

Resumindo as informações obtidas pelo Lema 14, temos que se H é uma folha de T onde $H[V(H) - \mathbf{Z}(H)]$ pertence a classe $\mathbf{L} \cup \{K_3, K_4\}$, então:

- Todos os pares de amigos não artificiais podem ser obtidos em $O(n)$;
- Todos os pares de amigos formados por um \mathbf{Z} -vértice em $\mathbf{D}(H)$ e por um vértice não artificial podem ser obtidos em $O(n)$.
- Todos os pares de amigos e inimigos contendo \mathbf{Z} -vértices em $\mathbf{Z}(H) - \mathbf{D}(H)$ podem ser obtidos em $O(n^3)$.

O Lema 15, a seguir, prova que a complexidade de se obter pares de amigos em grafos introspectivos é $O(n^3)$. Na prova do Lema 15, utilizaremos a definição de vértices internos e interiores. Dado um caminho $v_0v_1v_2 \dots v_{k-2}v_{k-1}v_k$, dizemos que os vértices v_1, \dots, v_{k-1} são vértices internos, e que os vértices v_2, \dots, v_{k-2} são vértices interiores. Logicamente, se $k < 3$, o caminho não possui vértices internos, e se $k < 5$ o caminho não possui vértices interiores.

Lema 15 *Seja G um grafo introspectivo e T a sua árvore de decomposição. Se G possui pares de amigos então é possível obter um deles em $O(n^3)$. Se G não possui pares de amigos, é possível afirmar que eles não existem em $O(n^3)$.*

Prova: Como G é introspectivo, nenhuma folha de T contém pares de amigos não artificiais. Logo, precisamos saber se algum par de amigos de G foi separado pelo processo de decomposição.

Se G possui pares de amigos, G possui um par de amigos fortes. Nosso objetivo é mostrar que, se G possui pares de amigos, é possível obter esse par de amigos fortes. Pelos Lemas 9, 10 e 11, um par de amigos fortes é um par de amigos fraternos.

Se obtivermos em \mathbf{W} um par de vértices vermelhos $\{r_1, r_2\}$, onde $r_1 = \text{rot}(x)$ e $r_2 = \text{rot}(y)$, com um caminho par entre eles com todos os vértices interiores azuis, então $\{x, y\}$ é um par de vértices fraternos de G satisfazendo as condições do Lema 13, e, por esse

lema, G possui um par de amigos facilmente identificável. Se não formos capazes de obter tal par de vértices em \mathbf{W} , então pelo Lema 12, G não possui pares de amigos.

Pelo Lema 14, todos os pares de amigos e inimigos de H_i contendo um \mathbf{Z} -vértice z pode ser obtido em $O(n^3)$. Ou seja, o grafo auxiliar \mathbf{W} pode ser montado em $O(n^3)$. Como o grafo \mathbf{W} é uma árvore, e temos $O(n^2)$ possíveis pares de vértices vermelhos, numa estimativa grosseira, executando uma busca em profundidade sobre \mathbf{W} , em $O(n^3)$ é possível afirmar se existe algum par de vértices vermelhos de \mathbf{W} , com um caminho de custo par entre eles com todos os vértices interiores azuis. Se existir, G possui pares de amigos. Senão, G não possui pares de amigos. Desta forma, obtemos o resultado desejado. \square

3.8 Teorema Principal

Dado um grafo planar perfeito G , é possível obter um par de amigos, se G contém um, ou decidir que G não contém pares de amigos, em $O(n^3)$.

Prova: Seguindo o algoritmo de Hsu modificado, obtemos o resultado desejado. Caso seja encontrado um par de amigos durante o algoritmo, este é terminado. Seja T a árvore de decomposição de G . Se G é completo, então G não possui pares de amigos, e o algoritmo é terminado.

Se T possui um corte do tipo **I**, pelo Lema 2, G contém um par de amigos facilmente identificável, e o algoritmo é terminado. Aplicamos então os cortes do tipo **II**, introduzindo **A**-vértices e **Z**-vértices quando necessário. Se T possui um corte do tipo **II-b**, pelo Lema 2, G possui um par de amigos, e o algoritmo é terminado.

Terminados os cortes do tipo **II**, o algoritmo procura por cortes do tipo **III**. Se T possui um corte do tipo **III-b** ou **III-c**, pelo Lema 2, G possui um par de amigos, e o algoritmo é terminado. Procura-se então por cortes do tipo **IV**. Se existir algum, pelo Lema 2, G possui um par de amigos, e o algoritmo é terminado.

Como G é planar perfeito, as folhas de T pertencem as classes **S**, **L**, **C** ou $\{K_3, K_4\}$.

3. Pares de Amigos em Grafos Planares Perfeitos

Se alguma folha de T pertence a **S** ou **C**, então, pelos Lemas 1 e 3, G possui um par de amigos, e o algoritmo é terminado.

Pelo Lema 14, se alguma folha de T pertencente a classe **L** contém um par de amigos não artificiais, este pode ser obtido em $O(n)$. Se algum par de amigos for obtido dessa forma, pelo Lema 1, G possui um par de amigos, e o algoritmo é terminado.

Se acabou a decomposição e o algoritmo ainda não foi terminado, isso significa que em T só ocorreram cortes dos tipos **II-a**, **II-c** e **III-a**, T só possui folhas da classe $\mathbf{L} \cup \{K_3, K_4\}$ e, pelo Teorema 1, os vértices não-artificiais das folhas de T possuem a vizinhança ilustrada na Figura 3.2. Em outras palavras, G é um grafo introspectivo.

Logo, pelo Lema 15, se G possui pares de amigos, é possível obter um deles em $O(n^3)$. Se G não possui pares de amigos, é possível afirmar que eles não existem em $O(n^3)$. \square

3.9 Pares de Amigos em Grafos Planares Perfeitos

A seguir, apresentamos a visão geral do algoritmo polinomial para obtenção de pares de amigos em grafos planares perfeitos. Os Lemas apresentados justificam esse algoritmo. No Anexo A, apresentamos de forma mais detalhada o algoritmo de decomposição e reconhecimento de grafos planares perfeitos de W. L. Hsu [10], utilizado na presente seção.

3. Pares de Amigos em Grafos Planares Perfeitos

1. **Algoritmo:** PAGPP - PARTE 1
2. **Entrada:** GRAFO PLANAR PERFEITO G
- 3.
4. **Se** G é completo, **então** G não possui pares de amigos
5. **fim** do algoritmo;
- 6.
7. **Aplica** o algoritmo modificado de Hsu sobre G // incluindo e colorindo **Z**-vértices
- 8.
9. **Seja** T a árvore de decomposição
10. **Seja** F o conjunto das folhas de T
11. **Seja** W um grafo auxiliar vazio
- 12.
13. **Se** (T possui cortes do tipo **I**, **II-b**, **III-b**, **III-c** ou **IV**) **então**
14. G possui pares de amigos;
15. **fim** do algoritmo;
- 16.
17. **Se** (T possui alguma folha das classes **S** ou **C**) **então**
18. G possui pares de amigos;
19. **fim** do algoritmo;
- 20.
21. **Se** (uma folha **L** de T contém vértices de grau 2 adjacentes a vértices não artificiais) **então**
22. G possui pares de amigos;
23. **fim** do algoritmo;
- 24.

Figura 3.13. Algoritmo de Obtenção de Pares de Amigos em Grafos Planares Perfeitos

3. Pares de Amigos em Grafos Planares Perfeitos

```
1. Algoritmo: PAGPP - PARTE 2
2. Entrada: GRAFO PLANAR PERFEITO  $G$ 
3.
4. // Neste ponto,  $G$  é introspectivo
5.
6. Para (todo grafo  $H$  em  $\mathbf{F}$ ) faça
7.
8. //  $\mathbf{D}(H)$  contém os  $\mathbf{Z}$ -vértices brancos  $z$  de  $H$  tais que  $Diam(z) \neq \emptyset$ 
9. Para todo vértice  $z$  em  $\mathbf{D}(H)$  faça
10. //  $y = Diam(z)$ 
11. Adiciona  $(rot(y), rot(z))$  como aresta de custo 0 em  $\mathbf{W}$ 
12.
13. Para todo vértice  $z$  em  $\mathbf{Z}(H) - \mathbf{D}(H)$  faça
14. Para todo vértice  $y \neq z$  em  $(V(H) - \mathbf{A}(H)) \cup (\mathbf{Z}(H) - \mathbf{D}(H))$  faça
15.
16. Aplica o Teorema 3 sobre o par  $(y, z)$ 
17. Se  $(y, z)$  é um par de amigos) então
18. Adiciona  $(rot(y), rot(z))$  como aresta de custo 0 em  $\mathbf{W}$ 
19. Se  $(y, z)$  é um par de inimigos) então
20. Adiciona  $(rot(y), rot(z))$  como aresta de custo 1 em  $\mathbf{W}$ 
21.
22.
23. Aplica Busca em Profundidade sobre  $\mathbf{W}$ 
24.
25. Se ( $\mathbf{W}$  contém dois vértices vermelhos com caminho par de vértices interiores azuis) então
26.  $G$  possui pares de amigos
27. Senão
28.  $G$  não possui pares de amigos
```

Figura 3.14. Continuação do Algoritmo de Obtenção de Pares de Amigos em Grafos Planares Perfeitos

Conclusão e Considerações Finais

Nesta dissertação de mestrado, a Conjectura de B. Reed foi demonstrada para o caso dos grafos planares perfeitos, através da obtenção de um algoritmo polinomial para encontrar pares de amigos nesses grafos.

Outro ponto de grande importância seria provar o mesmo resultado para os pares de inimigos, que é ligeiramente mais complicado, mas acredita-se ser possível. Já obtemos alguns resultados intermediários não descritos nesse documento, mas ainda não chegamos ao resultado final. Outros artigos estão disponíveis e, com seu estudo, podem facilitar a obtenção desse resultado.

O prosseguimento natural a ser dado a esse trabalho é a investigação da Conjectura de B. Reed para o caso de um grafo perfeito qualquer.

Reconhecimento de Grafos Planares Perfeitos

A prova da Conjectura Forte de Berge para os grafos planares por Tucker fez com que o problema de reconhecimento de grafos planares perfeitos se resumisse a encontrar ou não um buraco ímpar nesse grafo. É isso o que W. L. Hsu faz em seu algoritmo. A idéia principal é caracterizar grafos planares sem buracos ímpares decompondo-os em componentes "altamente" conexas que se encaixam em uma das seguintes classes de grafos planares perfeitos:

- Classe **C** de grafos planares de comparabilidade.
- Classe **L** de grafos linha de bipartite cujos vértices possuem grau ≥ 3
- Classe **S** consistindo de alguns grafos especiais, ilustrados na Figura 2.2.

Esse esquema garante que decompondo um grafo planar imperfeito nos fornecerá pelo menos uma componente imperfeita, isto é, uma componente que não pertence a nenhuma dessas três classes. A seguir esboçamos uma visão geral desse algoritmo:

A seguir daremos algumas definições iniciais antes de começar com as decomposições. Um corte de tamanho i é denominado uma i -separação. Uma 1-separação consiste de uma articulação do grafo. Uma 2-separação consiste de dois vértices adjacentes (2-clique) ou não. Em uma 3-separação $C = \{x, y, z\}$, $(x, y) \in E(G)$ $((x, z), (y, z))$ podem ou não pertencer

1. **Algoritmo:** DECOMPOSIÇÃO
2. **Entrada:** Grafo planar G
- 3.
4. $L_1 \leftarrow \emptyset; L_2 \leftarrow \emptyset; L_3 \leftarrow \emptyset; L_4 \leftarrow \emptyset;$
5. Decomponha G em componentes biconexas
6. $L_1 \leftarrow \{\text{componentes biconexas de } G\};$
7. **Para** todo grafo H em L_1 **faça**
8. Decomponha H em componentes 2-inseparáveis
9. $L_2 \leftarrow L_2 \cup \{\text{componentes 2-inseparáveis de } H\}$
- 10.
11. **Para** todo grafo H em L_2 **faça**
12. Decomponha H em componentes 3-inseparáveis
13. $L_3 \leftarrow L_3 \cup \{\text{componentes 3-inseparáveis de } H\}$
- 14.
15. **Para** todo grafo H em L_3 **faça**
16. Decomponha H em componentes 4-inseparáveis
17. $L_4 \leftarrow L_4 \cup \{\text{componentes 4-inseparáveis de } H\}$
- 18.
19. **Se** existe algum grafo em L_4 que não pertence a $\mathbf{S} \cup \mathbf{L} \cup \mathbf{C} \cup \{K_3, K_4\}$ **então**
20. G não é perfeito
21. **Senão**
22. G é perfeito

Figura A.1. Algoritmo de Decomposição de Grafos Planares

a $E(G)$). Em uma 4-separação $C=\{w,x,y,z\}$, (w,x) , (x,y) , (y,z) e $(w,z) \in E(G)$, mas $(w,y),(x,z) \notin E(G)$. Na Figura A.2 abaixo mostramos esses cortes.

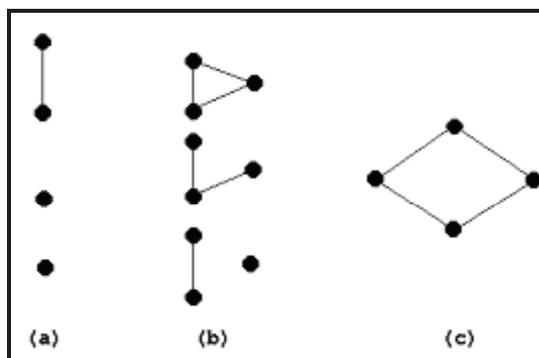


Figura A.2. Vários tipos de cortes (a) 2-separação (b) 3-separação (c) 4- separação

A intenção desses cortes é decompor o grafo preservando os buracos ímpares, se eles existem, ou a ausência deles. Logo a cada decomposição, eventualmente vértices e arestas serão introduzidas com esse objetivo.

Retirando uma articulação x de G , serão geradas as componentes H_1, H_2, \dots, H_k conexas de $G-\{x\}$. Seja G_i o subgrafo de G induzido sobre $V(H_i) \cup \{x\}$, $i=1, 2, \dots, k$. Nós dizemos então que G é decomposto em G_1, \dots, G_k . Um grafo não separável por uma 1-separação é dito ser 1-inseparável. Essa decomposição é interessante para nós porque nenhum buraco (ciclo induzido) de G poderia estar em duas dessas componentes 1-inseparáveis de G , pois no melhor caso o que liga essas duas componentes é apenas um vértice articulação. Em outras palavras, se G possui um buraco ímpar, ele estará presente em uma de suas componentes G_i 1-inseparáveis.

A partir desse momento, a notação a seguir será muito utilizada: Um grafo G é dito ser separado por um corte C se, removendo C , desconectamos o grafo G . Sejam H_1, H_2, \dots, H_k as componentes conexas de $G-C$. Seja G_i o subgrafo de G induzido sobre $V(H_i) \cup C$, $i=1 \dots k$.

Um grafo G 1-inseparável é dito ser separável por uma 2-separação $C=\{x,y\}$ se $G-C$ é desconexo e:

- (i) ou $(x,y) \in E(G)$;

(ii) ou $(x,y) \notin E(G)$ e:

(a) ou $G-C$ contém mais que duas componentes

(b) ou $G-C$ contém duas componentes e nenhuma delas é um único vértice ou uma aresta (2-clique).

Se (i) ocorre então, da mesma forma que na 1-separação, um buraco ímpar de G não poderia estar em duas componentes, porque o elo de ligação entre duas dessas componentes seriam a aresta (x,y) , e como um buraco é um ciclo induzido, ou seja sem cordas, isso não é possível. Então podemos dizer que G é decomposto em G_1, \dots, G_k .

Se (ii) ocorre, então dois caminhos induzidos P e Q entre x e y em diferentes componentes G_i , conforme a notação citada, devem ter a mesma paridade para formar um buraco par, para que G seja perfeito. Se P é par (Q também é par), G é dito ser decomposto em G'_1, \dots, G'_k onde G'_i é o subgrafo G_i com um vértice adicional x_i conectado tanto a x como a y . Se P é ímpar (Q também é ímpar), G é dito ser decomposto em G_1'', \dots, G_k'' , onde G_i'' é o subgrafo G_i com vértices adicionais x_i e y_i e as arestas (x, x_i) , (x_i, y_i) e (y_i, y) .

Na Figura A.3, ilustramos melhor essas 2-separações. Esses vértices adicionados durante o processo de decomposição serão chamados de **A**-vértices. Um vértice natural, que não é um **A**-vértice é chamado de **R**-vértice. É fácil observar a razão da restrição do item (ii)(b) acima. A razão é para evitar criarmos componentes G_i desnecessárias.

Certamente, se um buraco ímpar está contido em G , então pelo menos alguma de suas componentes conterá um buraco ímpar.

Um grafo perfeito 2-inseparável G é dito ser separável por uma 3-separação $C = \{x, y, z\}$ de **R**-vértices em G , onde $(x, y) \in E(G)$, se $G-C$ é desconectado, e uma das seguintes condições é satisfeita:

(i) $\{x, y, z\}$ é um triângulo; ou

(ii) $\{x, y, z\}$ não formam um triângulo e cada grafo componente G_i satisfaz a propriedade que existe dois caminhos induzidos de diferente paridade em G_i com um conectando

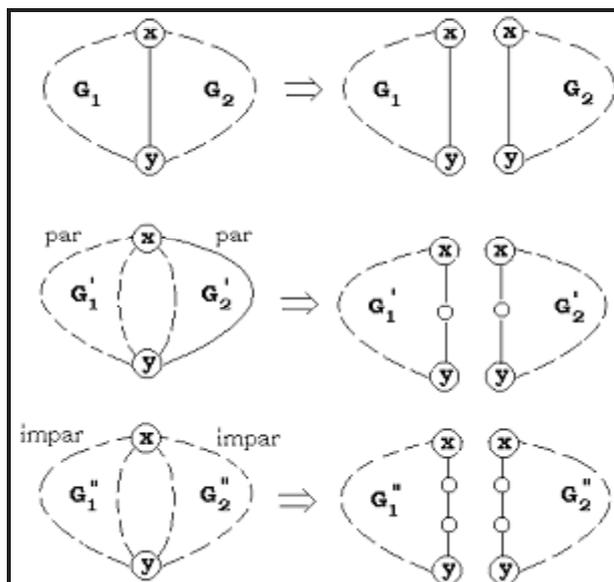


Figura A.3. Vários tipos de 2-separação

x, z evitando y e outro conectando y, z evitando x , e nenhum G_i sendo isomorfo aos grafos da Figura A.4.

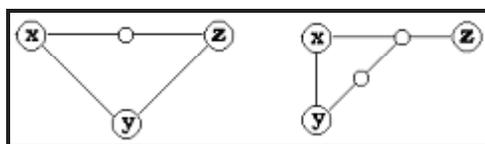


Figura A.4. Componentes proibidas para a 3-separação

A razão dessas componentes proibidas da Figura A.4, é para evitar criarmos componentes G_i desnecessárias, como no caso da 2-separação.

Se $G-C$ tivesse mais de duas componentes G_i , essas componentes teriam arestas conectando-as a x , y e z , pois G é 2-inseparável. Mas, então, G teria uma subdivisão do $K_{3,3}$, e pelo teorema de Kuratowsky(1930), G não poderia ser planar. Logo $G-C$ têm apenas duas componentes G_1 e G_2 .

Se (i) acontece, G é dito ser decomposto em G_1 e G_2 , pois um buraco ímpar não poderia passar por uma 3-clique, pois ele não pode ter cordas. Se (ii) acontece, sem perda de generalidade, assumamos que o caminho induzido conectando x a z é par e o caminho

induzido conectando y a z é ímpar (Se o caminho de x a z é ímpar e o de y a z é par, basta trocar x por y). Então, nós temos os dois subcasos abaixo:

- (a) $(y,z) \in E(G)$. Então G é dito ser decomposto em G'_1 e G'_2 , onde G'_i é o grafo G_i com um vértice adicional x_1 e os arcos (x,x_1) , (z,x_1) , conforme a Figura A.5(a).
- (b) $(y,z) \notin E(G)$. Então G é dito ser decomposto em G_1'' e G_2'' , onde G_i'' é o grafo G_i com dois vértices adicionais x_1 e y_1 e os arcos (x,x_1) , (y,y_1) , (z,x_1) e (x_1,y_1) , conforme a Figura A.5(b).

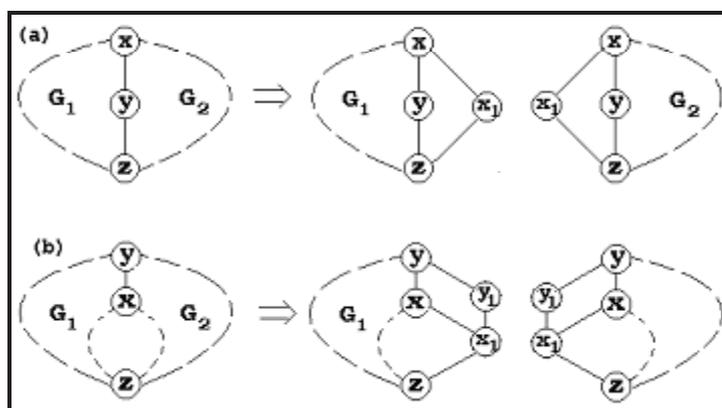


Figura A.5. Vários tipos de 3-separação

Como o caminho induzido de x a z é par e o de y a z é ímpar, essa transformação mantém a perfeição do grafo original, ou seja, se o grafo era perfeito, suas componentes G_1 e G_2 também o serão. Se o grafo tinha um buraco ímpar, uma de suas componentes também terá um buraco ímpar.

Nessa definição de 3-separação, nós deliberadamente excluimos a classe Φ de grafos perfeitos 2-inseparáveis definida abaixo. Um grafo G é dito pertencer a classe Φ se todas as seguintes condições são satisfeitas:

- (a) G é 3-inseparável de acordo com a definição de 3-separação dada
- (b) G contém um 3-corte $C=\{x,y,z\}$ tal que $(x,y) \in E(G)$, mas (x,z) e $(y,z) \notin E(G)$

- (c) As componentes G_1 e G_2 de G com respeito ao corte C contêm dois caminhos induzidos, um de x a z evitando y , e outro de y a z evitando x com mesma paridade.

Será mostrado a seguir que a classe Φ está contida na união de duas classes \mathbf{L} e \mathbf{S} . Definimos a vizinhança fechada $N[u]$ de um vértice u como sendo a união de u e de seus vértices adjacentes. A classe \mathbf{S} já foi definida anteriormente. A classe \mathbf{L} consiste de grafos que são 2-inseparáveis satisfazendo as duas condições seguintes:

- (i) A vizinhança de cada vértice u é igual a uma dos grafos da Figura A.6.
(ii) A fronteira de cada face não-triangular é um buraco par.

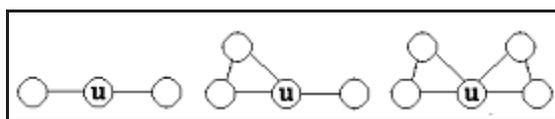


Figura A.6. Estrutura de vizinhança dos grafos da classe \mathbf{L}

Provaremos a seguir que a classe \mathbf{L} é a classe de grafos linha de bipartites cujo grau máximo é menor ou igual a 3. É sabido que essa classe é perfeita.

[Hsu] **Teorema 1** *Grafos na classe \mathbf{L} são perfeitos.*

Esboço da Prova: Considere um grafo G em \mathbf{L} . Uma clique é dita maximal em um grafo se não existe nenhuma outra clique no grafo que contém essa clique. Cada clique maximal de G possui ou 2 ou 3 vértices, pela sua estrutura de vizinhança mostrada na Figura A.6. Essa mesma estrutura implica que cada vértice está contido em exatamente duas cliques maximais e que quaisquer duas cliques maximais podem ter no máximo um vértice em comum. Construa um grafo clique G^* de G representando cada clique maximal de G como um vértice de G^* e conectando dois vértices de G^* se e somente se as cliques correspondentes em G possuem um vértice em comum.

É fácil observar que G^* também é planar: uma configuração planar de G^* pode ser obtida sobre uma de G , adicionando um vértice no meio de todas as 2-cliques maximais e

contraíndo todos os arcos que estão contido nos triângulos de tal forma que cada triângulo de G é contraído em um simples vértice em G^* . Também é fácil verificar que G^* não contém triângulos (basta observar que, se tivesse um triângulo, teríamos 3 cliques maximais de G adjacentes entre si. Então, a estrutura de vizinhança de um vértice de conexão entre duas dessas cliques maximais seria quebrada). Também é fácil ver que o grafo G é o grafo linha de G^* . (Seja u um vértice de G^* . Como u representa uma clique maximal de p vértices, $p=2,3$, de G , então cada um desses p vértices conectam essa clique maximal a p cliques maximais distintas, conforme a observação já dita que cada vértice de G está contido em exatamente duas cliques maximais. Essas p cliques maximais, representam vértices em G^* , e esses vértices são adjacentes a u em G^* . Logo as p arestas de u em G^* podem ser representadas pelos p vértices da sua clique maximal em G , e essas p arestas de u em G^* são vizinhas entre si logicamente, ocasionando nas arestas entre os respectivos p vértices de G , formando a tal clique maximal).

Como cada vértice em G^* têm grau menor ou igual a 3, visto que a maior clique de G é um triângulo, um ciclo em G^* não pode conter dois vértices repetidos. Logo existe uma correspondência um-a-um entre ciclos de G^* e ciclos induzidos de tamanho maior que 3 em G , e ambos tendo a mesma paridade (Três vértices A,B,C consecutivos de um ciclo em G^* são cliques maximais em G . Em G , A e B contém um vértice em comum x , e B e C contém um vértice em comum y . A aresta xy existe em G , pois estão na clique maximal B , sendo a aresta xy obviamente o caminho induzido entre x e y . Logo cada clique maximal do ciclo em G^* pode ser representado por uma aresta em G . Como em um ciclo o número de vértices é igual ao número de arestas, então o ciclo em G^* e o ciclo induzido em G têm a mesma paridade).

Para mostrar que G é perfeito, é suficiente mostrar que G^* é bipartite. Porque se G^* é bipartite, então G^* não contém ciclos ímpares, e portanto G não contém ciclos induzidos ímpares, sendo perfeito, já que G é planar. Note que cada face não-triangular de G corresponde a uma face de G^* . Como a fronteira de cada face de G é um buraco par (conforme a definição da classe **L**), então a fronteira da face correspondente de G^* deve formar um ciclo par. Como qualquer ciclo de G^* é uma diferença simétrica (união menos

interseção) dos ciclos da fronteira das faces incluídas por esse ciclo, então ele deve ser par. Portanto, G^* é bipartite e G é perfeito. \square

Na Figura A.7, nós ilustramos um grafo G da classe **L**. As cliques maximais de G estão representadas em círculos escuros. Essas cliques correspondem a vértices em G^* .

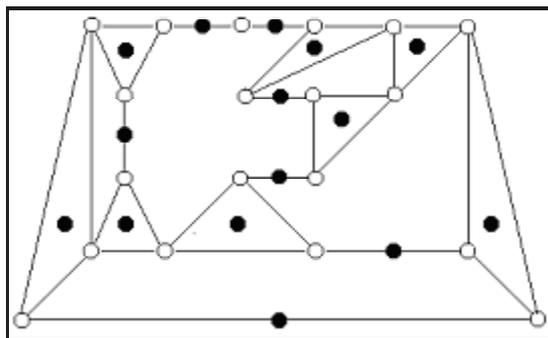


Figura A.7. Exemplo de um grafo da classe **L**

Um resultado bastante interessante, que mostraremos a seguir, é a caracterização dos grafos da classe Φ . Apresentaremos um esboço da prova do seguinte teorema.

[Hsu] Teorema 2 $\Phi\text{-}\mathcal{S} \subseteq \mathbf{L}$

Esboço da Prova: A seguir enunciaremos alguns lemas que levam a prova do Teorema 2.

[Hsu] Lema 1 *Sejam H_1 e H_2 as componentes de G com respeito ao 3-corte $C = \{x, y, z\}$. Sejam G_1 e G_2 os subgrafos induzidos de G sobre $V(H_1) \cup C$ e sobre $V(H_2) \cup C$ respectivamente. Então G_1 contém um vértice articulação e G_2 é biconexo, ou vice-versa.*

Esboço da Prova: A Figura A.8 ilustra um grafo da classe Φ , os vértices x , y e z do corte C e as faces externas em G_1 e G_2 contendo esses vértices representados por P_1 - P_2 e Q_1 - Q_2 , respectivamente. Para $x - y - Q_2 - z - P_1 - x$ não ser um buraco ímpar em G , x deve ser adjacente a u em Q_2 ou y deve ser adjacente a v em P_1 . Sem perda de generalidade, suponha que seja x seja adjacente a u em Q_2 . Logo y está separado de

Q_1 pelo ciclo $xu(\text{sobre } Q_2)zP_1x$. Também, x não pode ser adjacente a ninguém em P_2 , senão teríamos um 3-corte em G (desconectando y). Portanto, temos um buraco ímpar $z - P_2 - y - x - Q_1 - z$, pois não há como existir atalhos nesse ciclo. Logo, um dos ciclos formados pelas faces externas em G_1 ou em G_2 não formam um buraco.

Sem perda de generalidade, suponha que seja em G_2 . É fácil observar que xQ_1z e yQ_2z são caminhos induzidos, senão teríamos um 2-corte em G , e portanto esses dois caminhos devem ter um vértice em comum. Como esses dois caminhos fazem parte da face exterior, esse vértice é uma articulação. Seja z' esse vértice. Também é fácil de ver que (z, z') é uma aresta, senão teríamos um 2-corte, visto que xQ_1z é face exterior. Se G_1 também tivesse uma articulação, então as duas formariam um 2-corte em G . Pela mesma razão, z' é a única articulação de G_2 . \square

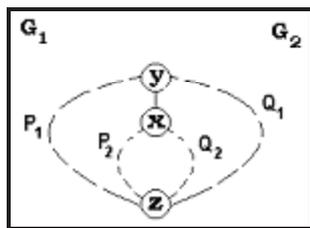


Figura A.8. grafo da classe Φ

[Hsu] **Lema 2** G_2 é isomorfo ao grafo da Figura A.9(a) (ou seja, z' deve ser adjacente a x e y). Além disso, existe $x' \in P_1$, $y' \in P_2$ tais que $(x', y') \in E(G)$ e a configuração de x , y , z , x' , y' e z' é semelhante a mostrada na Figura A.9(b), onde $x(\text{sobre } P_1)x'y'(\text{sobre } P_2)yx$ forma um buraco par.

Esboço da Prova: Como o ciclo $z - P_1 - x - y - P_2 - z$ é ímpar, e (z, x) , $(z, y) \notin E(G)$, então devem haver arestas conectando vértices entre P_1 e P_2 além de (x, y) , senão o ciclo seria um buraco ímpar. Sejam $x' \in xP_1$ e $y' \in yP_2$ escolhidos tal que $(x', y') \in E(G)$, $(x', y') \neq (x, y)$ e não existindo nenhuma aresta de xP_1x' a yP_2y' . Após algumas observações, podemos concluir que $x \neq x'$ e $y \neq y'$. Após a aplicação de um lema simples, sobre o buraco par $x - x' - y' - y - x$ e sobre a face externa xP_1zP_2y , observamos que

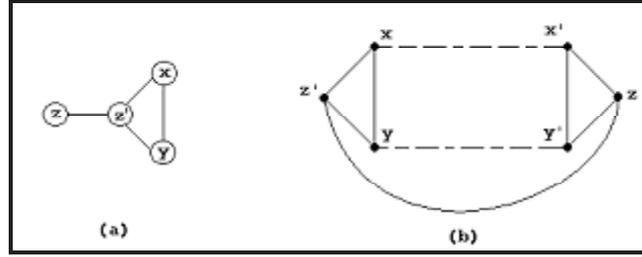


Figura A.9. (a) Vários G'_2s . (b) Configuração de x, y, z, x', y' e z'

z, x', y' formam um triângulo, ou seja, Q_1 e Q_2 são vazios. \square

Um corolário muito importante obtido do Lema 2 e fácil de se observar, é que todo caminho induzido de x a x' ou a y' evitando y e z , e todo caminho induzido de y a x' ou a y' evitando x e z , possuem a mesma paridade, pois formam ciclos induzidos com z e z' , conforme a Figura A.9(b).

Definimos um vértice como sendo um **F**-vértice, se ele possui a estrutura de vizinhança de um grafo da classe **L** definida anteriormente na Figura A.6. Seja U o conjunto dos vértices de G que estão dentro (exclusive) do ciclo induzido $xP_1x'y'P_2yx$. Um vértice r é dito ser um **P**-vértice em yP_2y' (ou xP_1x') se existe um caminho induzido, de tamanho > 1 conectando r a um vértice em xP_1x' (ou yP_2y') através de vértices em U .

A seguir, daremos um esboço da prova de outro lema muito importante. Observe que esse próximo lema já se aproxima do nosso objetivo, que é a prova do Teorema 2.

[Hsu] Lema 3 *Se algum dos vértices x, y, x', y' não é um **F**-vértice então $G \in \mathbf{S}$.*

Esboço da Prova: Seja y_1 o vizinho de y em P_2 . A Figura A.10 auxiliará nessas explicações. Na prova desse lema, o autor supõe sem perda de generalidade que y não é um **F**-vértice. Com isso, ele prova facilmente que existe um vértice w em U adjacente a y mas não a y_1 . Depois o autor conclui que y é um **P**-vértice, senão, um **P**-vértice t_R em yP_2y' formaria um 3-corte com x e z' , cujas componentes revelam pela aplicação de outro lema que $\{t_R, x', z\}$ formam um triângulo (e portanto $t_R = y'$ por planaridade), e que y não possui ninguém adjacente além de x, z' e y' . Isso é um absurdo, visto que y é

adjacente a w . Logo y deve ser um **P**-vértice. Analogamente, prova-se que todo vértice em P_2y' ou xP_1x' , com grau maior que 2 é um **P**-vértice.

Depois disso, por contradição, podemos provar que w está em um caminho induzido $y - w - Q - t$ onde $t \in P_1x'$ e Q está totalmente em U . Seguindo essa linha de raciocínio, ele consegue provar mais tarde, que o grafo G deve ter o formato dos grafos da classe **S**, mostrado na Figura 2.2.

Concluindo, logo em seguida, que se algum dos vértices x, y, x', y' não é um **F**-vértice então $G \in \mathbf{S}$. \square

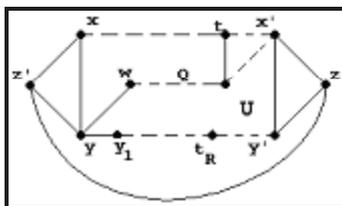


Figura A.10. Auxílio às explicações do Lema 3

Outro lema é provado, mostrando que se G é um grafo em $\Phi\text{-S}$ então os vizinhos de um **F**-vértice cujo grau é maior que 2 em G devem ser **F**-vértices também. Desse fato, consegue-se chegar rapidamente que $\Phi\text{-S} \subseteq \mathbf{L}$. \square

Falta ainda realizar a 4-separação, mas essa será um pouco mais fácil. Como um grafo em $\mathbf{S} \cup \mathbf{L}$ é facilmente reconhecível, não é mais necessário separá-lo. Portanto, nós definimos esses grafos como sendo 4-inseparáveis e voltamos nossa atenção sobre os grafos 3-inseparáveis restantes.

Um grafo 3-inseparável, no complemento da classe $\mathbf{S} \cup \mathbf{L}$ é dito ser separável por uma 4-separação $C = \{w, x, y, z\}$, onde $wxyz$ forma um ciclo induzido, se as seguintes condições são satisfeitas:

- (1) $G - C$ é desconexo com duas componentes H_1, H_2 tais que os grafos G_i induzidos sobre $V(H_i) \cup C$ não são isomorfos ao grafo da Figura A.11.

- (2) Existem dois caminhos induzidos, um de w a y evitando x e z , e outro de x a z evitando w e y , com paridade diferente.

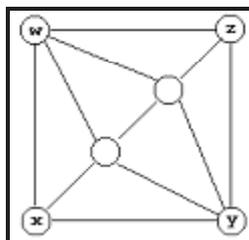


Figura A.11. grafo componente proibido na 4-separação

Provou-se na demonstração do teorema 2 que um grafo 3-inseparável no complemento da classe $\mathbf{S} \cup \mathbf{L}$ não pode conter nenhum \mathbf{F} -vértice. G então é dito ser decomposto por um 4-separação $C=\{w,x,y,z\}$ em duas componentes G'_i , $i=1,2$, que consistem do grafo G_i com dois vértices adicionais conectando vértices em C , como também mostrado na Figura A.11 (sem perda de generalidade, assuma que qualquer caminho induzido de w a y evitando x e z é par, conforme restrição (2)).

Os vértices adicionais são chamados de \mathbf{A} -vértices, como já mencionado. É suficiente considerar 4-separações com apenas \mathbf{R} -vértices, porque pode ser facilmente mostrado que a existência de uma 4-separação contendo um \mathbf{A} -vértice implica na existência de um outro com \mathbf{R} -vértices apenas.

Essa adição de vértices e arestas é necessária e suficiente para manter a estrutura de ciclos induzidos de G . Portanto, podemos observar que G é perfeito se e somente se cada uma dessas componentes são perfeitas.

A seguir, falta-nos caracterizar os grafos 4-inseparáveis. Um C_4 -vértice é um vértice cujos vizinhos formam um 4-ciclo induzido. Um grafo G é dito ser da classe \mathbf{C} se ele satisfaz a propriedade que existe um subgrafo induzido H bipartite de G tal que $V(G)-V(H)$ é um conjunto independente de C_4 -vértices em G . Sejam H_1 e H_2 as partições de H . Grafos na classe \mathbf{C} são de comparabilidade, pois basta direcionar todas as arestas dos vértices de H_1 para fora e todas as arestas dos vértices de H_2 para dentro. Na Figura A.12, ilustramos um exemplo de um grafo da classe \mathbf{C} .

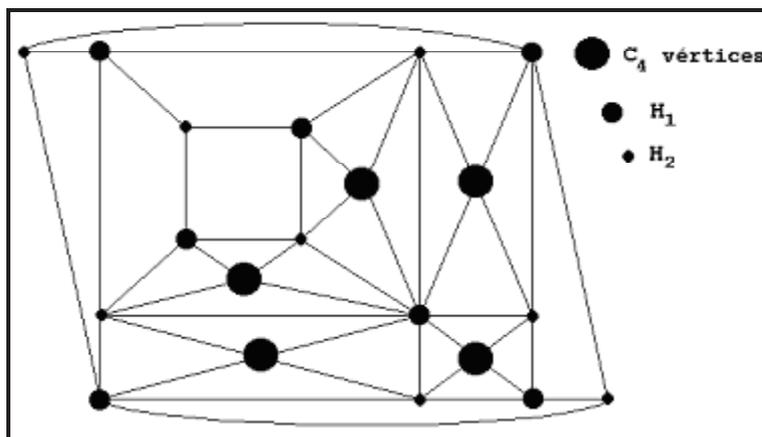


Figura A.12. exemplo de um grafo da classe C

Inicialmente, o autor prova que se G é um grafo 4-inseparável no complemento das classes **L** e **S**, que não é uma 4-clique, então todo triângulo de G contém um C_4 -vértice. Ele divide essa prova em dois casos. Um triângulo de G ou tem um de seus arcos sobre uma face não-triangular, ou compartilha todas as três arestas com outros três triângulos.

Supondo que em um triângulo (u,x,y) u e x não são C_4 -vértices, ele prova que y necessariamente deve ser um C_4 -vértice para os dois casos citados.

Com isso, o autor consegue demonstrar que um grafo G 4-inseparável que não é uma 4-clique pertence a uma das classes: **S**, **L** e **C**. Para provar isso, consideramos um grafo 4-inseparável no complemento das classes **S** e **L**. Nós devemos provar que existe em G um conjunto independente de C_4 -vértices cuja remoção leva a um grafo bipartite, pela definição dos grafos na classe **C**. Seja G' o subgrafo induzido de todos os C_4 -vértices de G . Como vimos, removendo todos os vértices em G' , todos os triângulos de G serão destruídos, e portanto, devemos obter um grafo bipartite, para que G seja perfeito.

O autor então prova que cada componente de G' é um caminho induzido (ou ciclo) a menos de uma trivial exceção. Com isso, ele consegue obter um conjunto independente de C_4 -vértices a partir das componentes de G' , sendo esta a prova de que G pertence a classe **C**. FIM.

Essas demonstrações justificam o esboço do algoritmo de W. L. Hsu ilustrado no início desse capítulo. O restante do artigo apresenta o cálculo da complexidade $O(n^3)$, alguns

A. Reconhecimento de Grafos Planares Perfeitos

exemplos e introduz o problema dos Pares de Amigos em Grafos Planares Perfeitos. Essa decomposição dos grafos planares perfeitos também fornecem uma prova alternativa ao problema solucionado por Tucker, a validade da Conjectura Forte de Berge para os grafos planares.

Como já dissemos essa decomposição já foi utilizada em diversos artigos sobre Pares de Amigos em Grafos Planares, sendo portanto muito importante para essa dissertação de mestrado dominar bem essa técnica de decomposição.

Reconhecimento de Grafos Planares de Quase Paridade Estrita

Em 1997, C. Linhares-Sales, F. Maffray e B. Reed obtiveram um algoritmo polinomial $O(n^3)$ de reconhecimento de grafos **QPS** planares [5]. Um grafo G é de Quase Paridade Estrita, ou resumidamente **QPS**, se, $\forall H$ induzido $\subseteq G$, H é uma clique ou possui um par de amigos.

Seja então um grafo planar G . Aplicando o algoritmo de reconhecimento de grafos planares **QPS**, teremos duas possibilidades: G é **QPS** ou G não é **QPS**. Se G é **QPS** então $\forall H$ induzido $\subseteq G$, H é uma clique ou possui um par de amigos. Ou seja, é possível afirmar em tempo polinomial que G possui um par de amigos. Mas se G não é **QPS** então ainda não se pode afirmar nada.

Tais explicações servem para mostrar a importância desse algoritmo e da sua inteira compreensão, visto que através dele pode se realizar uma tentativa para resolver o nosso problema inicial: obter em tempo polinomial um par de amigos em um grafo planar perfeito.

Outro artigo dos mesmos autores intitulado "On Planar Quasi-Parity Graphs"[4], revela com mais detalhes a estrutura interna desses grafos, o que é bastante utilizado no algoritmo de reconhecimento de grafos **QPS** planares.

O artigo "Recognizing Planar Strict Quasi-Parity Graphs"[5] inicia definindo uma

obstrução como sendo qualquer grafo minimalmente livre de pares de amigos e diferente de uma clique. Segue imediatamente que um grafo é **QPS** se e somente se ele não contém uma obstrução como subgrafo induzido.

Um teorema muito utilizado e provado em [4] afirma que se um grafo G é uma obstrução planar então, ou G é um buraco ímpar, ou G é um grafo linha de bipartite. A seguir enunciaremos dois lemas utilizados no artigo e provados em [4].

Lema de Cortes em Obstruções: *Se G é uma obstrução planar diferente de um buraco ímpar, então:*

- (i) G não possui um corte de clique (em particular, G é 2-conexo);
- (ii) Todo 2-corte de G é um par de inimigos;
- (iii) se G é 3-conexo então todo 3-corte de G é a vizinhança de um vértice e contém exatamente uma aresta.

Lema de Vizinhança em Obstruções: *Se G é uma obstrução planar diferente de um buraco ímpar, então para cada vértice x de G , a vizinhança de x induz ou um $K_2 + K_1$ ou $2K_2$ (ilustrados na Figura B.1)*

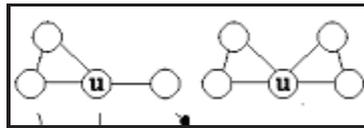


Figura B.1. Vizinhança correta

Definimos uma vizinhança correta de v se $N[v]$ induz um grafo como os da Figura B.1, e incorreta caso contrário. Observando o teorema e os lemas anteriores, define-se um candidato (o nome é por ele ser candidato a ser uma obstrução planar). Usa-se candidatos por eles serem mais fáceis de se lidar do que as obstruções.

Definição de Candidato: Um candidato é qualquer grafo G planar satisfazendo as propriedades:

- (i) G é linha de bipartite;

- (ii) Todo vizinhança em G é correta;
- (iii) G é 2-conexo;
- (iv) Todo 2-corte de G é um par de inimigos;
- (v) G não possui corte clique;
- (vi) Todo 3-corte minimal C de G contém no máximo uma aresta, e se contém uma aresta então C é a vizinhança de um vértice.

O artigo mostra que a últimas propriedades (v) e (vi) são consequência das anteriores. Em [4], prova-se que todo candidato é livre de pares de amigos, e portanto:

[Qps] Corolário 1 *Toda obstrução é um candidato. Todo candidato contém uma obstrução.*

[Qps] Corolário 2 *Um grafo planar é QPS se e somente se não possui um candidato.*

O artigo então define o processo de colagem (glueing) e descolagem (unglueing) através de uma aresta plana (flat) que consiste de uma aresta que não está em um triângulo. É fácil ver que se G não contém buracos ímpares, então uma aresta (a, b) é plana se e somente se $\{a, b\}$ formam um par de inimigos em $G - (a, b)$.

Definição de Colagem: Sejam $M_1(V_1, E_1), \dots, M_k(V_k, E_k)$ k grafos. Se existem dois vértices a, b tais que $V_i \cap V_j = \{a, b\} \forall i, j (1 \leq i < j \leq k)$, e (a, b) é uma aresta plana de cada M_i , então diz-se que esses grafos são coláveis sobre (a, b) . O grafo $G = (V, E)$ resultante da colagem têm $V = V_1 \cup \dots \cup V_k$ e $E = E_1 \cup \dots \cup E_k - \{(a, b)\}$.

Definição de Descolagem: Seja G um grafo com um corte de par de inimigos $\{a, b\}$, e B_1, \dots, B_k as componentes de $G - \{a, b\}$. Sejam então os grafos G_i induzidos sobre $V(G_i) = V(B_i) \cup \{a, b\}$ mais a aresta (a, b) . Dizemos então que os grafos G_i são resultantes da descolagem de G sobre o par $\{a, b\}$.

É fácil ver que os processos de colagem e descolagem preservam a planaridade e a ausência de buracos ímpares. A seguir, enunciamos dois lemas sobre esses processos:

Lema de Colagem para Candidatos: *Se M_1 e M_2 são dois candidatos coláveis sobre uma aresta plana comum, então o grafo resultante da colagem também é um candidato.*

Lema de Descolagem para Candidatos: *Seja M um candidato que admite um corte de pares de inimigos. Sejam M_1 e M_2 os dois grafos obtidos pela descolagem de M sobre esse corte. Então M_1 e M_2 são candidatos.*

A prova desses dois lemas é feita se fazendo uma checagem das propriedades (i)-(iv) da definição de candidatos. Com essas definições, é possível iniciar o algoritmo de reconhecimento de grafos **QPS** planares. Dado um grafo planar perfeito, esse algoritmo decompõe o grafo procurando por obstruções, aproveitando a árvore de decomposição de Hsu [10] já citado anteriormente. Nos cinco lemas a seguir, o grafo H é um nó não folha da árvore de decomposição e Q o correspondente corte que decompõe H .

[Qps] **Lema 1** *Se Q é um corte clique, então H é **QPS** se e somente se todos os seus filhos na árvore também são.*

Prova: Como obstruções não possuem corte clique, Q não corta uma possível obstrução, e portanto ela é herdada para algum filho de H . \square

É fácil ver que se G é um grafo planar perfeito 2-conexo e x, y são dois vértices não adjacentes que formam um 2-corte de G , então $\{x, y\}$ ou é um par de amigos ou é um par de inimigos de G , porque senão obteríamos um buraco ímpar.

[Qps] **Lema 2** *Se Q é um corte de pares de amigos, então H é **QPS** se e somente se todos os seus filhos na árvore também são.*

Prova: Como obstruções não possuem pares de amigos, Q não corta uma possível obstrução, e portanto ela é herdada para algum filho de H . \square

[Qps] **Lema 3** *Se Q é um corte de pares de inimigos $\{a, b\}$, então H contém uma obstrução se e somente se, ou algum filho de H contém uma obstrução, ou existem ao menos*

B. Reconhecimento de Grafos Planares de Quase Paridade Estrita

dois filhos H_1 e H_2 tais que $H_1 + (a, b)$ e $H_2 + (a, b)$ contém uma obstrução que contém essa aresta.

Prova: Se Q não corta a obstrução, então ela é herdada para algum filho de H . A outra opção vem caso Q corte a obstrução, o que é consequência direta do Lema da Descolagem. \square

Nesse momento, o par $\{a, b\}$ é marcado com a cor amarela em cada filho H_i de H , visto que, pelo Lema 3, uma obstrução de H talvez só possa ser percebida em seus filhos com a presença da aresta (a, b) neles.

[Qps] Lema 4 *Se $Q = \{x, y, z\}$ é uma 3-separação (ver definição na decomposição de Hsu), então H contém uma obstrução se e somente se, ou algum filho de H contém uma obstrução, ou (y, z) não é uma aresta e $H_1 + (y, z)$ e $H_2 + (y, z)$ contém uma obstrução que contém a aresta (y, z) .*

Prova: Suponha que M é uma obstrução de H . Se (y, z) é uma aresta, então Q é um P_3 e, pelo Lema de Cortes em Obstruções, obstruções 3-conexas devem ter exatamente uma aresta. Pelo mesmo lema, M não pode ser separado por dois vértices adjacentes de Q , e tampouco por dois vértices não adjacentes de Q , x e z , porque, nesse último caso, eles formariam um par de amigos, e obstruções são livres de pares de amigos.

Se (y, z) não é uma aresta, e $Q \subset M$, então, pelo Lema de Cortes em Obstruções, Q deve ser a vizinhança de algum vértice a em M ; mas isso contradiz os requisitos para Q ser uma 3-separação. Logo apenas dois vértices de Q cortam M . Como $\{x, y\}$ é uma aresta e $\{x, z\}$ é um par de amigos, pela definição de 3-separação, então a única possibilidade é $Q \cap M = \{y, z\}$, e $\{y, z\}$ é um par de inimigos. Nesse caso, pelo Lema da Colagem, encontramos obstruções em $H_1 + (y, z)$ e $H_2 + (y, z)$. \square

Nesse momento, o par $\{y, z\}$ é marcado com a cor amarela em H_1 e H_2 (apenas duas componentes por planaridade), visto que, pelo Lema 4, uma obstrução de H talvez só possa ser percebida em seus filhos com a presença da aresta (y, z) neles.

B. Reconhecimento de Grafos Planares de Quase Paridade Estrita

[Qps] Lema 5 *Se Q é uma 4-separação (ver definição na decomposição de Hsu, acima, pág. 22), então H contém uma obstrução se e somente se, ou algum filho de H contém uma obstrução, ou (x, z) não é uma aresta e $H_1+(x, z)$ e $H_2+(x, z)$ contém uma obstrução que contém a aresta (x, z) .*

Prova: Mesmos argumentos da prova do Lema 4. \square

Nesse momento, o par $\{x, z\}$ é marcado com a cor amarela em H_1 e H_2 , visto que, pelo Lema 5, uma obstrução de H talvez só possa ser percebida em seus filhos com a presença da aresta (x, z) neles.

Observando agora as folhas da árvore de decomposição de Hsu, cada grafo H possui um conjunto Y_H (yellow) de pares de vértices amarelos. Seja $H + Y_H$ o grafo obtido de H adicionando as arestas dos pares amarelos. Pelos Lemas 3 a 5, se o grafo G original contém uma obstrução, então ao menos um $H + Y_H$ contém uma obstrução. Mas, se algum $H + Y_H$ contém uma obstrução, isso não implica necessariamente que G contém uma obstrução, porque o processo de colagem sobre a aresta amarela não preserva obstruções, como pode ser visto na Figura B.2. Para resolver esse problema, será feito o uso de pseudo-candidatos.

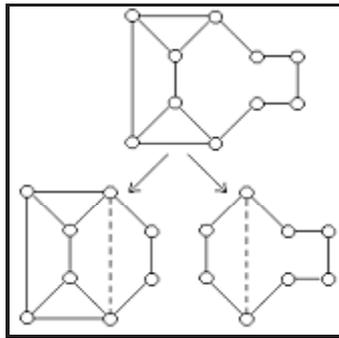


Figura B.2. Decomposição de um grafo **QPS** em grafos que contém obstruções

Definição de Pseudo-Candidato: Um pseudo-candidato é definido recursivamente como:

- (i) Todo candidato é um pseudo-candidato;

- (ii) Dados k pseudo-candidatos coláveis sobre uma aresta plana, o grafo resultante é um pseudo-candidato.

A única diferença entre candidatos e pseudo-candidatos é que pseudo-candidatos admitem 2-cortes com mais de duas componentes, enquanto que, nos candidatos, todo 2-corte possui exatamente duas componentes devido a propriedade de vizinhança correta.

[Qps] **Lema 6** *Todo pseudo-candidato contém um candidato.*

Prova: Por indução, suponha que G é um pseudo-candidato e que esse lema é válido para todos os pseudo-candidatos com menos vértices que G . Se todo 2-corte de G produz exatamente duas componentes, então G é claramente um candidato. Suponha então que existe um 2-corte Q de G , onde $G - Q$ tem $k > 2$ componentes. Seja G' o subgrafo obtido de G removendo todos os vértices de $k - 2$ componentes arbitrárias de $G - Q$. Logo G' é um pseudo-candidato e, por hipótese de indução G' contém um candidato. \square

[Qps] **Corolário 3** *Todo pseudo-candidato contém uma obstrução.*

Prova: Como todo pseudo-candidato possui um candidato, e como todo candidato possui uma obstrução, então todo pseudo-candidato possui uma obstrução. \square

[Qps] **Corolário 4** *Um grafo planar perfeito é **QPS** se e somente se não contém um pseudo-candidato.*

Prova: Para G ser **QPS**, G não pode conter obstruções. Como todo pseudo-candidato contém uma obstrução, então G não pode conter pseudo-candidatos. Como todo candidato é um pseudo-candidato, e como toda obstrução é um candidato, então toda obstrução é um pseudo-candidato. Se H não contém pseudo-candidatos, H não possui obstruções, e portanto H é **QPS**. \square

[Qps] Lema 7 *Suponha que exista uma coleção L de candidatos M_1, \dots, M_p tais que:*

- (i) *Cada M_i é um subgrafo induzido de $H + Y_H$ para alguma folha H ;*
- (ii) *Para $i \neq j$, $M_i \cap M_j$ é, ou vazio, ou uma aresta amarela;*
- (iii) *Cada aresta amarela que aparece em algum M_i , aparece em ao menos dois deles.*
Então o grafo $M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_p - Y_H$ é pseudo-candidato e subgrafo induzido de G .

Prova: Conseqüência da definição de pseudo-candidatos e dos Lemas 3 a 5. \square

O Lema 7 mostra-nos que basta obter uma coleção apropriada (segundo as definições do Lema 7) de candidatos nas folhas da árvore de decomposição para obtermos um pseudo-candidato como subgrafo induzido de G . Para uma folha H de G , será necessário determinar se $H + Y_H$ contém um candidato ou não. Relembrando a decomposição de Hsu, para o grafo ser planar perfeito, as folhas da decomposição devem pertencer as classes **S**, **L** ou **C**.

Se $H \in \mathbf{S}$, e como **S** é uma classe finita, a questão é trivial e obtida através de análise exaustiva : a única obstrução possível é o $\overline{C_6}$, caso H seja uma subdivisão do S_1 (ver Figura 2.2).

[Qps] Lema 8 *Se $H \in \mathbf{C}$, então $H + Y_H$ não contém obstruções.*

Prova: Pela exata definição da classe **C** em [10], temos que H é transitivamente orientado. Prova-se então que $H + Y_H$ também é transitivamente orientado e, conforme [16], $H + Y_H$ é **QPS** e portanto não possui obstruções. \square

Os Lemas 7 e 8, mostram que apenas o C_6 pode aparecer como obstrução nas folhas da árvore da decomposição de G que estão em **S** \cup **C**.

Se $H \in \mathbf{L}$, então H não contém vértices artificiais obtidos de 3-separações nem de 4-separações, porque senão alguma condição de vizinhança (ver Figura A.6) seria violada.

B. Reconhecimento de Grafos Planares de Quase Paridade Estrita

Logo os vértices artificiais são todos provenientes de uma 2-separação. Esses vértices podem ser emparelhados dois a dois de tal forma que cada par é o interior de um caminho induzido de tamanho 3, cujas extremidades devem ser vértices de grau 3 que formam um par amarelo (conforme Lema 3).

Seja A o conjunto dos vértices artificiais. Segue então que $H + Y_H - A$ é um grafo linha de bipartite. Portanto, $H + Y_H$ contém um candidato se e somente se $H + Y_H - A$ contém um candidato.

Seja L a lista dos grafos $H + Y_H - A$ para as **L**-folhas H da árvore de decomposição. Adicionamos em L a obstrução C_6 (isomorfo ao grafo linha do bipartite $K_{2,3}$) que poderia aparecer de uma **S**-folha.

Seja H' qualquer elemento de L . Se H' contém um vértice z de grau no máximo 2, certamente ele não estará em um candidato de H , visto que $N(z)$ é um corte que violaria as propriedades da definição de candidatos. Então H' contém um candidato se e somente se $H' - \{z\}$ contém. Trocando H' por $H' - \{z\}$ em L , e repetindo esse processo enquanto existirem vértices de grau no máximo 2, obteremos um grafo final que adicionaremos a L se ele não for vazio. A isso chamamos de redução de vértices de grau baixo de L . Feita essa redução, todos os elementos de L são grafos linha de bipartite que satisfazem os requisitos para serem candidatos, e portanto, todos os elementos de L são candidatos.

Observando os requisitos para o Lema 7 ser satisfeito, dizemos que uma aresta amarela é útil se ela aparece ao menos duas vezes em L , senão dizemos que ela é inútil. Se todas as arestas de L são úteis, aplicando o Lema 7, obtemos um pseudo-candidato em G , certificando que G não é um grafo **QPS**.

Por outro lado, suponha que exista alguma aresta amarela e inútil. Seja H' o único elemento de L que contém e . Logo, pelos Lemas 3 a 5, colando H' sobre e com um outro grafo que contém e (mas não como uma aresta amarela) não será produzido um grafo que contém um candidato. Logo, H' possui um candidato se e somente se $H' - e$ contém. Logo podemos trocar H' por $H' - e$ em L . A esse processo chamamos de redução de arestas inúteis. Uma única exceção a essa redução é feita para a aresta central do $\overline{C_6}$ proveniente da subdivisão do S_1 , ou seja, a aresta (b) da Figura 2.2(a). Essa aresta sempre será

considerada útil.

Aplicamos continuamente a redução de vértices e a redução de arestas, em qualquer ordem, o tanto quanto for possível. No final obteremos uma lista final L reduzida.

Se L não é vazia, então as hipóteses do Lema 7 são válidas (senão as reduções poderiam continuar), isto é, todo elemento de L é um candidato e todas as suas arestas amarelas são úteis. Logo, nós podemos obter um pseudo-candidato em G , como afirma o Lema 7, o que nos indica que G não é **QPS**. Se L é vazia então G não possui pseudo-candidatos e, pelo Corolário 4, G é **QPS**.

O artigo finaliza com o cálculo da complexidade do algoritmo, observando que as duas reduções podem ser feitas em $O(n^2)$, acarretando uma complexidade total de $O(n^3)$, igual ao da decomposição de W. L. Hsu.

Referências Bibliográficas

- [1] C. Berge. Graphs and hypergraphs. *North Holland, Amsterdam*, 1973.
- [2] D. Bienstock. On the complexity of testing for odd holes and induced odd paths. *Discrete Math.* 90, 85-92; see also *CORRIGENDUM: Discrete Math.* 102, 109, 1991, 1992.
- [3] B.Reed C.Linhares, F.Maffray. On planar perfectly contractile graphs. *Graphs and Combinatorics* 13, 167-187, 1997.
- [4] B.Reed C.Linhares-Sales, F.Maffray. On planar quasi-parity graphs. *Manuscript, Laboratoire Leibniz-IMAG, Grenoble, France*, 1999.
- [5] B.Reed C.Linhares-Sales, F.Maffray. Recognizing strict quasi-parity-graphs. *Manuscript, Laboratoire Leibniz-IMAG, Grenoble, France*, 2000.
- [6] S. A. Cook. A hierarchy for nondeterministic time complexity. *J. Comput. System Sci.* 7, 343-353, 1971.
- [7] C. Holzmann F. Harary. Line graphs of bipartite graphs. *Rev. Soc. Mat. Chile*, 1:19-22, 1974.
- [8] R. Hayward. Weakly triangulated graphs. *J. Combin. Theory Ser. B* 39, 200-208, 1985.
- [9] S. Hougardy. Even and odd pairs in linegraphs of bipartite graphs. *European J. Comb*, 16, 17-21., 1995.

- [10] W. L. Hsu. Recognizing planar perfect graphs. *J. Assoc. Comp. Mach.* 34, 255-288, 1987.
- [11] J.P.Uhry J. Fonlupt. Transformations which preserve perfectness and h-perfectness of graphs. *Ann. Discrete Math.* 16, 83-85, 1982.
- [12] G.Ravindra K.R.Parthasarathy. The strong perfect graph conjecture is true for $k_1,3$ -free graphs. *J. Combin. Theory Ser. B* 21, 212-223, 1976.
- [13] G.Ravindra K.R.Parthasarathy. The validity of strong perfect graph conjecture for (k_4-e) -free graphs. *J. Combin. Theory Ser B* 26, 98-100, 1976.
- [14] L. Lovász. A characterization of perfect graphs. *J.C.T.(B) Vol.13 pp.95-98*, 1972.
- [15] M.E.Bertschi. Perfectly contractile graphs. *J. Combin. Theory. Ser. B* 50, 222-230, 1990.
- [16] H. Meyniel. A new property of critical imperfect graphs and some consequences. *Europe Journal of Combinatorics* 8, 313-316, 1987.
- [17] D.S.Johnson M.Garey. Computers and intractability, a guide to the theory of np-completeness. *Freeman, San Francisco*, 1979.
- [18] A. Schriver M.Grötschel, L.Lovász. Polynomial algorithms for perfect graphs. *Ann. Deiscrete Math.* 21, 322-356, 1981.
- [19] F.Maffray R. Hayward, C.T.Hoàng. Optimizing weakly triangulated graphs. *Graphs and Combin.* 5, 339-349, 1989.
- [20] B. A. Reed. Perfection, parity, planarity and packing paths. *Uni. Waterloo Press, Waterloo, Canada, 407-419*, 1990.
- [21] B. A. Reed. A semi-strong perfect graph theorem. *Sc. Compu. Sci, McGill Uni.,17-18*, 1990.

- [22] A. Tucker. The strong perfect graph conjecture for planar graphs. *Canad. J. Math.* 25, 103-114, 1973.
- [23] A. Tucker. A reduction procedure for colouring perfect K_4 -free graphs. *J. Combin. Theory. Ser. B* 43, 151-172, 1987.
- [24] N.Sbihi V.Chvátal. Bull-free berge graphs are perfect. *Graphs and Combin.* 3, 127-139, 1987.
- [25] O. Porto W. L. Hsu. Comunicação privada. *Comunicação privada*, 1993.