

ABORDAGEM ANALÍTICO-NUMÉRICA DA TRANSFERÊNCIA  
DE CALOR E MASSA COM EFEITO DA PRESSÃO

Francisco Gêvane Muniz Cunha

---

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À COORDENAÇÃO DO CURSO DE PÓS-  
GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO, COMO REQUISITO  
PARCIAL PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE PELA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

Fortaleza - CE, 2002

ABORDAGEM ANALÍTICO-NUMÉRICA DA TRANSFERÊNCIA  
DE CALOR E MASSA COM EFEITO DA PRESSÃO

Francisco Gêvane Muniz Cunha

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Ciência da Computação da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Ciência da Computação.

Composição da Banca Examinadora:

---

Júlio Wilson Ribeiro, (D.C. - UFC - Orientador)

---

Mikhail Dimitrov Mikhailov, (COPPE - UFRJ)

---

Paulo de Tarso Cavalcante Freire, (D.F. - UFC)

---

Maria Andréa Formico Rodrigues, (M.C.C. - UFC)

Aprovada em 13 de abril de 2002.

“ Não desampares a sabedoria, e ela te protegerá;  
ama-a, e ela te guardará ”  
(Provérbios 4:6)

## AGRADECIMENTOS

- a) Ao Criador Universal, pela vida, saúde, entendimento...
- b) Ao Professor Júlio W. Ribeiro, por seu companheirismo e incentivo marcantes e por sua disposição e empenho na orientação deste trabalho;
- c) Ao Professor João B. F. Duarte, coorientador deste trabalho, por suas orientações em programação e pelas valiosas ajudas nas horas mais necessárias;
- d) Aos Professores Mikhail D. Mikhailov e Renato M. Cotta, da COPPE/UFRJ, por suas valiosas contribuições acadêmicas;
- e) Aos Professores e Alunos do Mestrado em Ciências da Computação, Laboratório de Inteligência Artificial (LIA) e Laboratório de Métodos Computacionais Híbridos (OMNI);
- f) Aos funcionários Orley, Debora e Rosana pelo apoio e presteza;
- g) A Francisco Heron (Doutorando em computação), por suas inestimáveis contribuições;
- h) À FUNCAP, pela concessão de minha bolsa de Mestrado;
- i) À minha esposa Aldenôra por estar sempre ao meu lado;
- j) Aos meus familiares pela confiança em mim depositada.

## SUMÁRIO

1. Introdução.....	01
2. Revisão Bibliográfica.....	04
2.1. Técnica de Transformada Integral.....	04
2.1.1. Formalismos.....	04
2.1.2. Solução para Equação Diferencial Parcial Parabólica.....	08
2.1.3. Solução geral do Sistema de EDP's Parabólicas Acopladas.....	12
2.2. Computação Simbólica.....	16
2.3. Problema de Secagem de Luikov.....	18
3. Problema de Transferência de Calor e Massa sob Efeito da Pressão.....	19
3.1. Problema Físico.....	19
3.2. Modelo Matemático.....	25
3.3. Solução por Transformada Integral.....	28
4. Resultados e Comentários.....	33
4.1. Resultados para o <i>Epoxy</i> .....	33
4.2. Resultados para o <i>Silicon Gel</i> .....	44
5. Conclusões e Sugestões.....	55
Apêndice I. <i>Notebook</i> do <i>Mathematica</i> 3.01 com implementação.....	57
Apêndice II. Implementação no <i>Fortran</i> .....	61
Referências Bibliográficas.....	65

## LISTA DE FIGURAS

	<i>Pág.</i>
4.1.1 Distribuição dos perfis de temperatura, T, no <i>epoxy</i> , usando o <i>Mathematica</i> , para N=M=P=10.....	38
4.1.2 Distribuição da temperatura, T, no <i>epoxy</i> , usando o <i>Mathematica</i> , para N=M=P=10.....	39
4.1.3 Distribuição dos perfis de umidade, M, no <i>epoxy</i> , usando o <i>Mathematica</i> , para N=M=P=10.....	40
4.1.4 Distribuição da umidade, M, no <i>epoxy</i> , usando o <i>Mathematica</i> , para N=M=P=10.....	41
4.1.5 Distribuição dos perfis de pressão, P, no <i>epoxy</i> , usando o <i>Mathematica</i> , para N=M=P=10.....	42
4.1.6 Distribuição da pressão, P, no <i>epoxy</i> , usando o <i>Mathematica</i> , para N=M=P=10.....	43
4.2.1 Distribuição dos perfis de temperatura, T, no <i>silicon gel</i> , usando o <i>Mathematica</i> , para N=M=P=10.....	48
4.2.2 Distribuição da temperatura, T, no <i>silicon gel</i> , usando o <i>Mathematica</i> , para N=M=P=10.....	49
4.2.3 Distribuição dos perfis de umidade, M, no <i>silicon gel</i> , usando o <i>Mathematica</i> , para N=M=P=10.....	50
4.2.4 Distribuição da umidade, M, no <i>silicon gel</i> , usando o <i>Mathematica</i> , para N=M=P=10.....	51
4.2.5 Distribuição dos perfis de pressão, P, no <i>silicon gel</i> , usando o <i>Mathematica</i> , para N=M=P=10.....	52
4.2.6 Distribuição da pressão, P, no <i>silicon gel</i> , usando o <i>Mathematica</i> , para N=M=P=10.....	53

## LISTA DE TABELAS

	<i>Pág.</i>
4.1.1 Convergência numérica e resultados obtidos usando o <i>Fortran</i> para as distribuições de temperatura no <i>epoxy</i> , adotando-se $Tol=10^{-5}$ .....	35
4.1.2 Convergência numérica e resultados obtidos usando o <i>Fortran</i> para as distribuições de umidade no <i>epoxy</i> , adotando-se $Tol=10^{-5}$ .....	36
4.1.3 Convergência numérica e resultados obtidos usando o <i>Fortran</i> para as distribuições de pressão no <i>epoxy</i> , adotando-se $Tol=10^{-5}$ .....	37
4.1.4 Distribuições de temperatura no <i>epoxy</i> , usando o <i>Mathematica</i> , para $N=M=P=10$ .....	38
4.1.5 Distribuições de umidade no <i>epoxy</i> , usando o <i>Mathematica</i> , para $N=M=P=10$ .....	40
4.1.6 Distribuições de pressão no <i>epoxy</i> , usando o <i>Mathematica</i> , para $N=M=P=10$ .....	42
4.2.1 Convergência numérica e resultados obtidos usando o <i>Fortran</i> para as distribuições de temperatura no <i>silicon gel</i> , adotando-se $Tol=10^{-5}$ .....	45
4.2.2 Convergência numérica e resultados obtidos usando o <i>Fortran</i> para as distribuições de umidade no <i>silicon gel</i> , adotando-se $Tol=10^{-5}$ .....	46
4.2.3 Convergência numérica e resultados obtidos usando o <i>Fortran</i> para as distribuições de pressão no <i>silicon gel</i> , adotando-se $Tol=10^{-5}$ .....	47
4.2.4 Distribuições de temperatura no <i>silicon gel</i> , usando o <i>Mathematica</i> , para $N=M=P=10$ .....	48
4.2.5 Distribuições de umidade no <i>silicon gel</i> , usando o <i>Mathematica</i> , para $N=M=P=10$ .....	50
4.2.6 Distribuições de pressão no <i>silicon gel</i> , usando o <i>Mathematica</i> , para $N=M=P=10$ .....	52

## NOMENCLATURA

### CAPÍTULO 2

$A_i(t)$	Coefficientes da série de expansão, definidos na equação (2.2);
$B_k$	Operadores lineares, definidos nas equações (2.15.m,n,o);
$K(\mathbf{x})$	Coefficiente difusivo, definido na equação (2.1.d);
$K_k(\mathbf{x})$	Coefficientes difusivos, definidos nas equações (2.15.j,k,l);
$L$	Operador linear, definido na equação (2.1.d);
$L_k$	Operadores lineares, definidos nas equações (2.15.j,k,l);
$M$	Ordem de truncamento do segundo potencial;
$N$	Ordem de truncamento do primeiro potencial;
$N_j$	Norma, definida na equação (2.6);
$N_{ki}$	Normas, definidas nas equações (2.18.a,b,c);
$P$	Ordem de truncamento do terceiro potencial;
$P(\mathbf{x},t)$	Termo fonte ou sumidouro, definido na equação (2.1.a);
$P_k(\mathbf{x},t), T_1(\mathbf{x},t), T_2(\mathbf{x},t), T_3(\mathbf{x},t)$	Termos fonte ou sumidouros, definidos nas equações (2.15.a,b,c);
$T(\mathbf{x},t)$	Potencial, definido na equação (2.1.a);

$T_k(\mathbf{x}, t)$	Potenciais, definidos nas equações (2.15.a,b,c);
$\bar{T}_i(t)$	Potencial transformado, definido na equação (2.7.a);
$\bar{T}_{ki}(t)$	Potenciais transformados, definido nas equações (2.17.a,b,c);
$d(\mathbf{x})$	Termo convectivo, definido na equação (2.1.d);
$d_k(\mathbf{x})$	Termos convectivos, definido nas equações (2.15.j,k,l);
$f(\mathbf{x})$	Distribuição inicial do potencial, definido na equação (2.1.b);
$f_k(\mathbf{x})$	Distribuição inicial dos potenciais, definido nas equações (2.15.d,e,f);
$\bar{f}_i$	Valor inicial do potencial transformado, definido na equação (2.13.b);
$\bar{f}_{ki}$	Valor inicial dos potenciais transformados, definido nas equações (2.19.d,e,f);
$\bar{g}_i(t)$	Termo fonte transformado, definido na equação (2.10.b);
$\bar{g}_{ki}(t, T_1(\mathbf{x}, t), T_2(\mathbf{x}, t), T_3(\mathbf{x}, t))$	Termos fonte transformados, definido nas equações (2.19.g,h,i);
$\bar{g}^*_{1i}$	Termo fonte transformado, definido nas equações (2.20.g);
$\bar{g}^*_{2j}$	Termo fonte transformado, definido nas equações (2.20.h);
$\bar{g}^*_{3l}$	Termo fonte transformado, definido nas equações (2.20.i);
$t$	Coordenada temporal, definida na equação (2.1.a);

- $w(\mathbf{x})$  Coeficiente capacitivo, definido na equação (2.1.a);
- $w_k(\mathbf{x})$  Coeficientes capacitivos, definido na equação (2.15.a,b,c);
- $x$  Coordenada espacial, definida na equação (2.1.a).

### CAPÍTULO 3

- $F_1$  Valor inicial da temperatura, para o problema homogêneo, definido na equação (3.29.a);
- $F_2$  Valor inicial da umidade, para o problema homogêneo, definido na equação (3.29.b);
- $F_3$  Valor inicial da pressão, para o problema homogêneo, definido na equação (3.29.c);
- $I_i$  Capacidade volumétrica da fonte do material, definida na equação (3.1);
- $L$  Comprimento característico do meio poroso;
- $M$  Massa molecular do ar úmido, definida na equação (3.12);
- $P \equiv P(x,t)$  Distribuição de pressão, definido na equação (3.21.c);
- $P_0$  Valor inicial da pressão, definido na equação (3.22.c);
- $P_B$  Valor da pressão no contorno  $x=L$ , definido na equação (3.24.c);
- $R$  Constante universal dos gases, definida na equação (3.12);
- $T \equiv T(x,t)$  Distribuição de temperatura, definido na equação (3.21.a);

$T_0$	Valor inicial da temperatura, definido na equação (3.22.a);
$T_B$	Valor da temperatura no contorno $x=L$ , definido na equação (3.24.a);
$U \equiv U(x,t)$	Distribuição de umidade, definido na equação (3.21.b);
$U_0$	Valor inicial da umidade, definido na equação (3.22.b);
$U_B$	Valor da umidade no contorno $x=L$ , definido na equação (3.24.b);
$a_m$	Difusividade de massa, definida na equação (3.2);
$b$	Saturação nos capilares do corpo, definida na equação (3.12);
$c_q$	Capacidade térmica, definida na equação (3.6);
$c_m$	Capacidade mássica, definida na equação (3.5);
$c_p$	Capacidade de filtração mássica, definida na equação (3.13);
$h_i$	Entalpia específica, definida na equação (3.6);
$j_i$	Densidade do fluxo de massa, definida na equação (3.10);
$j_{i\ dif}$	Densidade do fluxo de massa transferida por difusão, definida na equação (3.1);
$j_{i\ fil}$	Densidade do fluxo de massa transferida por filtração, definida na equação (3.1);
$j_q$	Fluxo de calor, definido na equação (3.6);
$k_q$	Coefficiente de condutividade térmica, definido na equação (3.7);
$k_m$	Coefficiente de condutividade mássica, definido na equação (3.17.b);
$k_p$	Coefficiente de filtração mássica, definido na equação (3.3);

- $m_i$       Conteúdo de massa, definido na equação (3.1);
- $t$           Coordenada temporal;
- $x$           Coordenada espacial;

## SÍMBOLOS GREGOS

### CAPÍTULO 2

- $\alpha(\mathbf{x})$       Coeficiente da condição de contorno, definido na equação (2.1.e);
- $\alpha_k(\mathbf{x})$       Coeficientes da condição de contorno, definidos nas equações (2.15.m,n,o);
- $\beta(\mathbf{x})$       Coeficiente da condição de contorno, definido na equação (2.1.e);
- $\beta_k(\mathbf{x})$       Coeficientes da condição de contorno, definidos nas equações (2.15.m,n,o);
- $\phi(\mathbf{x},t)$       Termo fonte da equação da condição de contorno, definido na equação (2.1.c);
- $\phi_k(\mathbf{x},t, T_1(\mathbf{x},t), T_2(\mathbf{x},t), T_3(\mathbf{x},t))$
- Termos fonte das equações da condição de contorno, definido nas equações (2.15.g,h,i);
- $\mu_i^2$             Autovalores do problema auxiliar, definidos na equação (2.3.a);
- $\mu_{ki}^2$           Autovalores do problema auxiliar, definidos nas equações (2.16,a,b,c);
- $\psi(\mu_i, \mathbf{x})$     Autofunção do problema auxiliar, definida na equação (2.3.a);
- $\psi_k(\mu_{ki}, \mathbf{x})$     Autofunções do problema auxiliar, definidas nas equações (2.16,a,b,c);

### CAPÍTULO 3

- $\Pi$               Porosidade média do corpo, definida na equação (3.12);

$\alpha_q$	Coeficiente de transferência de calor por convecção, definido na equação (3.17.d);
$\alpha_u$	Coeficiente de transferência de massa por convecção, definido na equação (3.17.b);
$\delta$	Coeficiente termogradiente, definido na equação (3.2);
$\varepsilon$	Critério de mudança de fase do líquido no interior do meio poroso, definido na equação (3.9);
$\lambda$	Calor latente de vaporização da água, definido na equação (3.8);
$\mu_{1i}^2$	Autovalores do problema auxiliar, definidos na equação (3.35.b);
$\mu_{2i}^2$	Autovalores do problema auxiliar, definidos na equação (3.36.b);
$\mu_{3i}^2$	Autovalores do problema auxiliar, definidos na equação (3.37.b);
$\theta_{1P}(x)$	Distribuição de temperatura, para o estado estacionário, definido nas equações (3.26.a);
$\theta_{1H}(x,t)$	Distribuição de temperatura, para o problema homogêneo associado, definido na equação (3.27.a);
$\theta_{2P}(x)$	Distribuição de teor de umidade, para o estado estacionário, definido nas equações (3.26.b);
$\theta_{2H}(x,t)$	Distribuição de teor de umidade, para o problema homogêneo associado, definido na equação (3.27.b);
$\theta_{3P}(x)$	Distribuição da pressão, para o estado estacionário, definido nas equações (3.26.c);

- $\theta_{3H}(x,t)$  Distribuição da pressão, para o problema homogêneo associado, definido na equação (3.27.c);
- $\bar{\theta}_{1i}(t)$  Distribuição de temperatura transformada, definido na equação (3.40.a);
- $\bar{\theta}_{2i}(t)$  Distribuição de umidade transformada, definido na equação (3.40.b);
- $\bar{\theta}_{3i}(t)$  Distribuição de pressão transformada, definido na equação (3.40.c);
- $\rho_0$  Densidade, definida na equação (3.1);
- $\psi_1(\mu_{1i},x)$  Autofunção do problema auxiliar, definida na equação (3.32.a);
- $\psi_2(\mu_{2i},x)$  Autofunção do problema auxiliar, definida na equação (3.33.a);
- $\psi_3(\mu_{3i},x)$  Autofunção do problema auxiliar, definida na equação (3.34.a).

## SUPERESCRITOS

– Indicador de variável ou valor transformado.

## SUBESCRITOS

$i, j, l$  Ordem das auto quantidades ou índice de linha e coluna, respectivamente;

$k=1,2,3$  Relacionado com temperatura, umidade e pressão, respectivamente;

$P$  Solução de regime permanente (estado estacionário);

$H$  Relativo ao problema homogêneo.

## RESUMO

Desenvolve-se o uso conjugado do método de transformada integral, de características híbridas analítico-numéricas, com os recursos de programação simbólica e programação numérica para se proceder à solução de problemas de interesse das engenharias e ciências físicas. Discute-se uma variante do problema de Luikov, que expressa a transferência simultânea de calor e massa num meio capilar poroso com efeito da pressão. Este é expresso por um sistema de equações diferenciais parciais parabólicas acopladas, EDP's. Preliminarmente, procede-se à análise via transformada integral de um sistema geral de EDP's, implementando-se como aplicação um algoritmo para solução da variante do problema de Luikov. Este algoritmo possui fortes características analíticas e interpreta os formalismos matemáticos associados ao método de transformada integral. Detalham-se os formalismos do método de transformada integral generalizada, GITT, quando é necessário a escolha de problemas auxiliares associados, tipo Sturm-Liouville, pares de transformada-inversa e normas. Visando melhorar as taxas de convergência numérica, o problema original é tratado por técnicas de filtragem para separar o problema homogêneo, o qual é transformado, resultando num problema de valor inicial acoplado. Este é resolvido através do uso de bibliotecas científicas disponíveis nas linguagens de programação utilizadas, *Mathematica* e *Fortran*. Para os materiais *epoxy* e *silicon gel*, de alto interesse na proteção de *chips* e circuitos eletrônicos, determinam-se as distribuições de temperatura, umidade e pressão no interior do meio capilar poroso, obtidas na forma de séries de expansão de autofunções, truncadas de uma ordem finita. Os resultados obtidos nas duas soluções são numericamente idênticos. Gráficos e tabelas disponibilizados possibilitam a análise fenomenológica.

## ABSTRACT

It is developed the conjugated use of the integral transform method that has analytical-numerical hybrid characteristics with the resources of symbolic programming and numerical programming to proceed to the solution of problems of interest to engineers and physical sciences. It is discussed one variant of the Luikov problem that expresses the simultaneous transfer of heat and mass in a capillary porous media with the pressure effect. This is expressed by a coupled system of parabolic partial differential equations, EDP's. Initially, the analysis of a general system of EDP's is realized using integral transform. As application this system is implemented in an algorithm to solve the variant of the Luikov problem. This algorithm has strong analytical characteristics and it interprets the mathematical formalisms associated to the integral transform method. The formalisms of the generalized integral transform method, GITT are detailed when it is necessary the choice of the auxiliary associated problems, Sturm-Liouville type, pairs of transform-inverse and norms. Seeking to improve the rates of numerical convergence, the original problem is treated by filtering techniques to separate the homogeneous problem that is transformed, resulting in a coupled initial value problem. This problem is solved through the use of available scientific libraries present in the utilized programming languages, Mathematica and Fortran. For the materials epoxy and silicon gel of high interest in the protection of chips and electronic circuits, the temperature, humidity and pressure distributions are determined inside a capillary porous media that are obtained in the form of eigenfunctions series truncated of a finite order. The results obtained for both solutions are numerically identical. Graphics and tables permit the phenomenological analysis.

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

No ocidente, a partir da década de 50, aparecem os primeiros computadores, desenvolvidos inicialmente com prioridade para executar tarefas associadas ao cálculo numérico avançado, proveniente de inúmeros problemas de origem científica e tecnológica. A linguagem de programação Fortran, *Formulae Translation*, se torna extensamente utilizada pelos cientistas, que desenvolvem inúmeros programas e técnicas de computação científica.

Presentemente, o uso da simulação computacional se caracteriza ainda mais como de fundamental importância para o desenvolvimento científico-tecnológico. Neste contexto, um dos grandes desafios para cientistas de várias áreas consiste na descoberta de novos procedimentos que venham minimizar certas restrições apontadas na literatura contemporânea: longo tempo de processamento, precisão limitada, instabilidade numérica, enorme esforço despendido na elaboração e modificação de algoritmos numéricos [01].

A simulação e análise fenomenológica, através do uso de recursos computacionais, é primordial no desenvolvimento de novas descobertas científicas e tecnológicas, com fortes reflexos nas políticas de desenvolvimento industrial. Destacam-se, entre outras contribuições relevantes, a descoberta de novas tecnologias em materiais supercondutores, fibras óticas, engenharia aeroespacial, biomedicina, proteção térmica de *chips* eletrônicos, modelagem e previsão meteorológicas. No campo acadêmico, ocupam cada vez mais espaço aplicações desenvolvidas através da simulação, concentradas em áreas como matemática computacional, mecânica computacional, ciência computacional e física computacional. Destaca-se que todas estas áreas contribuem em inúmeras áreas do conhecimento, citando-se: engenharia, computação, medicina, biologia e educação.

Para simular processos físicos, é necessário se consolidar uma complexa cadeia de pesquisas, enumerando-se: estabelecimento das leis governantes, postulação dos modelos matemáticos associados e o desenvolvimento de técnicas computacionais para tratamento analítico e numérico destes problemas, que muitas vezes são expressos por sistemas de equações diferenciais parciais, EDP's cuja solução requer elevado esforço computacional. Assim, o aprimoramento de metodologias para melhoria da modelagem computacional certamente contribuirá, para o avanço tecnológico da humanidade, permitindo a obtenção de produtos de alta qualidade, a custos mais reduzidos.

Historicamente, a corrida tecnológica ocidental desenvolvida com auxílio do computador levou ao aparecimento de técnicas puramente numéricas de solução, destacando-se os métodos de *diferenças finitas* e *elementos finitos* como ferramentas que possibilitam o processamento do cálculo numérico avançado através da utilização de linguagens de programação científicas. Genericamente, os métodos puramente numéricos baseiam-se na discretização temporal e espacial das equações originais.

Paralelamente, nos países do leste europeu, houve um desenvolvimento independente da computação científica, quando pesquisadores desenvolveram poderosas ferramentas analíticas e mesmo processadores simbólicos [02].

Algumas soluções analíticas associadas a problemas mais avançados, quando trabalhadas através de teorias matemáticas aprimoradas principalmente nas três décadas anteriores, mostraram-se mais confiáveis e suas implementações computacionais tornaram-se mais simples. Assim, no final da década de setenta, pesquisadores russos, búlgaros e americanos iniciaram pesquisas conjuntas para desenvolver técnicas híbridas analítico-numéricas, visando utilizá-las mais eficientemente na computação científica em função dos eventuais avanços, disponibilizados pela ciência da computação, que deveriam surgir nas décadas seguintes[03,04].

A partir da década de oitenta, a denominada técnica analítico-numérica de transformada integral [01-04] se consolidou como uma poderosa ferramenta para solução de EDP's, destacando-se suas vantagens no caso de problemas apontados na tradicional literatura como de difícil trato computacional.

O aparecimento de programas de computação simbólica no ocidente ocorre mais tardiamente quando comparado com o leste europeu. Porém, a promissora evolução destes, tornam ainda mais viável o investimento em métodos analítico-numéricos. A utilização do *Mathematica*®, *software* de última geração que reúne recursos de computação simbólica, torna ainda mais atrativo o desenvolvimento de programas com manipulação automática de expressões analíticas, segundo conjuntos de regras definidas à priori pelo usuário. Incorpora também uma poderosa linguagem simbólica para o desenvolvimento de programas avançados, integrando diferentes paradigmas de programação, tais como: programação procedural, funcional, lógica e orientada a objetos.

Entre as inúmeras e elegantes extensões da técnica de transformada integral obtidas e especificamente para justificar a presente pesquisa, destaca-se a análise e tratamento de problemas parabólicos acoplados difusivo-convectivos. Nesta direção resolveu-se por transformada integral uma variante do modelo matemático oriundo da teoria do processo de secagem proposto por Luikov [05-10] que, devido aos fortes acoplamentos existentes em suas versões linear e não-linear, foi apontado na literatura da modelagem computacional por diversos autores ocidentais como não-atrativo do ponto-de-vista analítico e numérico, mas estes utilizavam apenas técnicas puramente numéricas [11-13]. O fato dos autores ocidentais apontarem dificuldades analíticas foi causado pelo desconhecimento de modernas técnicas de tratamento analítico, como a técnica de transformada integral.

Desenvolveu-se através do uso dos formalismos da transformada integral um algoritmo que trata um problema difusivo-convectivo generalizado acoplado. Para aplicação, escolheu-se uma variante do problema de Luikov com efeito da pressão [07-09], expresso por um sistema de três equações diferenciais parciais. Neste, se visa determinar numericamente os valores da temperatura, umidade e pressão no interior de um meio capilar poroso. A implementação foi construída utilizando-se as linguagens de programação *Mathematica* e *Fortran*. Os resultados são apresentados nas formas de tabelas e gráficos, destacando-se as excelentes taxas de convergência numérica das séries de expansão de auto-funções e a consegüente obtenção de resultados *benchmark*.

Nas sessões seguintes se apresenta uma revisão bibliográfica do problema de Luikov, da técnica de transformada integral e da computação simbólica. Em seguida, desenvolve-se um algoritmo com tratamento e solução sistematizada de um problema composto por um sistema de três equações diferenciais parciais acopladas, do tipo parabólico, com contorno acoplado, quando se utilizam os formalismos de transformada integral. Como aplicação desta metodologia sistemática, implementa-se um algoritmo para

solução analítico-numérica de uma variante do problema de Luikov com efeito da pressão, onde se utiliza controle prescrito de erro e as linguagens de programação *Fortran* e *Mathematica*. Nas sessões posteriores, apresentam-se resultados, na forma de tabelas e gráficos, que posteriormente são criticamente discutidos. Conclusões e sugestões são apresentadas no capítulo final.

## CAPÍTULO 2

### REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

#### 2.1 Técnica De Transformada Integral

##### 2.1.1 Fundamentos

Na literatura, observa-se, de forma crescente, a partir da década de oitenta, um certo renascimento das técnicas ditas analíticas, voltadas para um melhor aproveitamento dos recentes avanços em análise numérica, linguagens de programação e métodos computacionais associados a problemas da matemática avançada. Estes investimentos buscam diminuir os custos computacionais, melhorar a precisão dos resultados e diminuir os esforços despendidos pelo programador nos estágios de construção e implementação algorítmicas.

Özisik e Murray publicaram em 1974 uma nova técnica de características analítico-numéricas para resolução de sistemas de equações diferenciais parciais, EDP's, a princípio não tratáveis pela teoria clássica de separação de variáveis conhecida no ocidente [02], a qual dispensava a necessidade do problema ser separável à priori. Estavam assim estabelecidos os formalismos básicos para o surgimento da denominada Técnica de Transformada Integral Clássica (*Classical Integral Transform Technique*), CITT.

Em um estágio bem mais avançado, Mikhailov e Özisik lançam em 1984, o primeiro livro generalizando os formalismos da CITT [03], que postulava um tratamento unificado, segundo sete classes de equações diferenciais parciais que foram definidas a partir de inúmeros problemas de transferência de calor e massa encontrados na literatura. Na década de oitenta, observa-se uma série de extensões da técnica de transformada integral clássica para resolução de diversos problemas abordados principalmente na literatura ocidental, que eram resolvidos por métodos discretizados denominados “puramente” numéricos, como diferenças finitas, elementos finitos, volumes finitos e suas variantes [14-19]. Comparando-se as características da abordagem da CITT, com as técnicas citadas, observou-se o aparecimento de uma série de vantagens [04, 20]:

- a) Metodologia sistemática de solução;
- b) Redução do tempo de processamento;
- c) Controle prescrito de erro;
- d) Aceleração da taxa de convergência numérica;
- e) Inexistência de malhas (fator que se acentua criticamente para problemas multidimensionais);
- f) Obtenção de soluções *benchmark*;
- g) Determinação numérica direta da função em um ponto (para valores definidos de tempo e espaço) sem necessidade de cálculo numérico de estados temporais anteriores ou de outros pontos do domínio espacial;
- h) Versatilidade do método em se hibridizar com outros, devido às suas características analítico-numéricas.

Em síntese, na década de oitenta, a CITT passou por uma contínua evolução, gerando soluções computacionais bastante eficientes para uma vasta gama de problemas a priori não transformáveis ou não solucionáveis numericamente [04,20], mostrando-se ser bastante competitiva.

Em função do processo evolutivo encontrado no método de transformada integral, em 1993, Cotta publicou o segundo livro relativo ao assunto [04], apresentando uma revisão dos formalismos clássicos, que são agora estendidos com ênfase para a solução de problemas não-lineares e fortemente acoplados e propondo técnicas para melhorar a eficiência da solução numérica. A partir de então, convencionou-se renomear o método, sendo intitulado como Técnica de Transformada Integral Generalizada (*Generalized Integral Transform Technique*), GITT.

Ainda nesta década, a computação simbólica passa a ser amplamente empregada como ferramenta no desenvolvimento dos formalismos analíticos de GITT [01,21], graças aos avanços disponibilizados em programação funcional, programação baseada em regras e outros recursos imprescindíveis à programação científica avançada. Com isso, a exaustiva manipulação de formulações analíticas passou a ser tarefa do computador, ampliando-se cada vez mais as fronteiras da GITT para o tratamento analítico, solução numérica e visualização gráfica de sistemas de EDP's não lineares acopladas [01,22-24]. Novos livros e publicações expandindo o poder da GITT são publicados e surge a primeira revista especializada em métodos híbridos, com destaque para a conjunção entre computação simbólica e métodos híbridos analítico-numéricos, que se passa a denominar de computação híbrida.

Uma vigorosa vantagem do método se caracteriza em se poder eliminar a dependência de variáveis espaciais associadas aos potenciais originais, o que se consegue via fórmulas analíticas de transformada. Assim o esforço computacional predominante é dispendido na solução do problema transformado, onde permanece apenas a dependência temporal. Torna-se necessário somente o uso de um processo de discretização numérica na variável temporal, para integração ao longo desta coordenada. Isto viabiliza o emprego de algoritmos bem estabelecidos para solução de sistemas de equações diferenciais ordinárias, EDO's, com controle automático de erro, que são encontradas em bibliotecas de sub-rotinas científicas. Para aceleração da taxa de convergência numérica da solução, adotam-se técnicas de filtragem, ordenamento de espectro de autovalores, balanços integrais e métodos adaptativos [01,11,12,25,26].

O método de GITT, conjugado ao uso de computação simbólica, possibilita ao usuário construir e implementar algoritmos que automaticamente manipulam e disponibilizam importantes informações analíticas [01,27]. Estes executam o processamento sistemático de tarefas repetitivas e tediosas, associadas ao desenvolvimento de cálculos analíticos avançados, que tradicionalmente eram realizadas via exaustiva manipulação humana.

Sem os avanços alcançados nos formalismos teóricos dos métodos analítico-numéricos, não seria possível se construir algoritmos que cada vez mais incorporassem e desenvolvessem cálculos analíticos e conseqüentemente tornasse mais atrativo o processamento analítico avançado.

Genericamente, para solução de um problema segundo os formalismos de GITT necessita-se de um par transformada-inversa e de um problema auxiliar associado, que incorpore características analíticas dos operadores do problema original. A eliminação de variáveis independentes, por meio de operadores de integração apropriados, leva a obtenção

de um sistema de equações diferenciais ordinárias, que é denominado de sistema transformado. Num passo seguinte, este último é truncado de uma ordem finita e prescrita  $N$ , para ser resolvido analítica e numericamente. Caso o sistema transformado possa apresentar solução analítica, esta pode ser obtida automaticamente. Em caso contrário, se busca uma solução numérica, através do uso de algoritmos computacionais disponíveis em bibliotecas de subrotinas científicas, citando-se o IMSL® [28].

Em síntese, os passos a serem executados para se resolver um problema através do uso dos formalismos da GITT podem ser sistematizados como mostrado a seguir:

- Escolha de um problema auxiliar associado, que guarda o máximo de informações do problema original, relativas à geometria e operadores;
- Desenvolver o par de transformadas integrais para os operadores “transformada” e “inversa”;
- Transformar o sistema de equações diferenciais parciais original, fazendo uso de operadores apropriados. Isto resulta na obtenção de um sistema de EDO’s infinito, não linear, que pode ou não ser acoplado. Se obtivermos o último, cada potencial transformado desacoplado pode ser independentemente resolvido chegando-se a uma solução exata;
- Truncar e resolver o sistema de EDO’s, segundo uma precisão prescrita, com controle numérico de erro;
- Construir os potenciais originais, através do uso das fórmulas de inversão.

Entre as inúmeras aplicações da GITT em modelagem avançada, ciência e tecnologia enumeram-se as seguintes:

- a) Problemas que possuem coeficientes variáveis nas equações governantes. Exemplificam-se modelos provenientes da análise de aletas com dissipação tempo-dependente e escoamento com desenvolvimento simultâneo em canais. Destacam-se as publicações de Mikhailov [29], Özisik [30], Cotta [30,31], Leiroz [31] e Aparecido [31].
- b) Problemas com coeficientes variáveis em suas condições de contorno. Enumeram-se modelos provenientes da análise da condução de calor com número de Biot tempo-dependente e convecção interna em dutos aletados externamente. Algumas relevantes contribuições são encontradas em Özisik [02,17,32], Murray [02], Yener [32], Cotta [16, 17,33] e Santos [17,33].
- c) Problemas que apresentam contornos geométricos variáveis, destacando-se modelos provenientes da análise de mudança de fase e oxidação em fronteiras móveis e controle do escoamento e transferência de calor em dutos irregulares relacionados a projetos de trocadores de calor compactos. Entre as principais publicações enumeram-se trabalhos de Özisik [18,34,35], Guçeri [34], Leite [35], Verguese [35], Cotta [18,19,36,37,38,39], Aparecido [18,19, 37,38,39] e Diniz [37].

- d) Problemas que possuem problemas auxiliares de difícil solução, que são aplicados na análise de trocadores bitubulares, processo de secagem, convecção interna forçada periódica e transiente, transferência de calor em escoamentos com efeitos de condução axial e convecção interna em dutos retangulares. Estes podem ser classificados de acordo com a natureza dos problemas auxiliares associados:
- problemas de autovalor acoplados: Mikhailov [03,12,40], Özisik [03,41], Shishedjiev [40], Rossen [42], Hayakawa [42], Cotta [12,14,41], Ribeiro [12,14], Lobo [43], Guedes [41] e Scofano Neto [14].
  - problemas de Sturm-Liouville que apresentem variável de uma transformada de Laplace: Cotta [44] e Özisik [44].
  - problemas de Sturm-Liouville que apresentem funções complexas: Cotta [45,46,47], Özisik [45], Kakaç [47] e Li [47].
  - problemas de Sturm-Liouville não clássicos: Bayazitoglu [48] e Özisik [48].
  - sistemas de Sturm-Liouville não separáveis: Aparecido e Cotta [49].
- e) Problemas não-lineares caracterizados pela presença de equações cujos termos fonte e/ou condições de contorno dependem do potencial a ser obtido (Cotta [50,51,52] e Serfaty [51,52]). Estes são aplicados na análise de condução de calor com condutividade térmica variável, condições de contorno com troca radiante, processo de secagem não linear, equações de camada limite e Navier-Stokes.

## 2.1.2 Solução para Equação Diferencial Parcial Parabólica

Visando um tratamento e solução generalizados de numerosos problemas difusivo-convectivos [03], seja o seguinte problema parabólico [03], definido numa região finita  $V$ , com superfície de contorno  $S$ :

$$w(\mathbf{x}) \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + LT(\mathbf{x}, t) = P(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in V, \quad t > 0 \quad (2.1.a)$$

com condição inicial

$$T(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V, \quad t = 0 \quad (2.1.b)$$

e condição de contorno

$$BT(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in S, \quad t > 0 \quad (2.1.c)$$

os operadores lineares  $L$  e  $B$  são definidos pelas expressões

$$L \equiv -\nabla \cdot K(\mathbf{x})\nabla + d(\mathbf{x}) \quad (2.1.d)$$

$$B \equiv \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x})K(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \quad (2.1.e)$$

onde  $T(\mathbf{x}, t)$  é o potencial a ser obtido (temperatura, concentração, etc.);  $w(\mathbf{x})$ ,  $K(\mathbf{x})$  e  $d(\mathbf{x})$  são coeficientes da equação (2.1.a) cujo termo não homogêneo  $P(\mathbf{x}, t)$  representa uma fonte ou sumidouro;  $\alpha(\mathbf{x})$  e  $\beta(\mathbf{x})$  são coeficientes prescritos da equação de contorno (2.1.c) cujo termo  $\phi(\mathbf{x}, t)$  expressa as informações de contorno não homogêneas;  $\partial/\partial \mathbf{n}$  corresponde à derivada na direção normal e apontando para a direção exterior à superfície de contorno  $S$ ;  $\mathbf{x}$  e  $t$  são variáveis independentes que representam as coordenadas espacial e temporal, respectivamente.

Primeiramente se supõe a representação do potencial  $T(\mathbf{x}, t)$  através de uma expansão de autofunções da forma

$$T(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i(t) \psi(\mu_i, \mathbf{x}) \quad (2.2)$$

onde as autofunções  $\psi(\mu_i, \mathbf{x})$  são obtidas a partir da adoção do seguinte problema auxiliar associado:

$$\mu_i^2 w(\mathbf{x}) \psi(\mu_i, \mathbf{x}) = L\psi(\mu_i, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V \quad (2.3.a)$$

possuindo a seguinte condição de contorno

$$B\psi(\mu_i, \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S \quad (2.3.b)$$

cujos termos guardam informações contidas nos operadores das equações (2.1.a) e (2.1.c), desprezando-se os termos não homogêneos  $P(\mathbf{x}, t)$  e  $\phi(\mathbf{x}, t)$ .

O problema auxiliar assim formulado é um problema de autovalor do tipo Sturm-Liouville e que possui as seguintes propriedades [53]:

a) os autovalores  $\mu_i^2$  são reais e positivos, podendo ser ordenados crescentemente. Assim,

$$\mu_1^2 < \mu_2^2 < \mu_3^2 < \mu_4^2 < \dots \quad (2.4.a)$$

b) as autofunções  $\psi(\mu_i, \mathbf{x})$  associadas aos autovalores  $\mu_i^2$  obedecem à relação de ortogonalidade

$$\int_V w(\mathbf{x}) \psi(\mu_i, \mathbf{x}) \psi(\mu_j, \mathbf{x}) dv = 0, \quad i \neq j. \quad (2.4.b)$$

Os coeficientes de expansão,  $A_i(t)$ , na equação (2.2), são obtidos aplicando-se o operador  $\int_V w(\mathbf{x}) \psi(\mu_j, \mathbf{x}) dv$ , conforme ilustrado a seguir:

$$\int_V w(\mathbf{x}) \psi(\mu_j, \mathbf{x}) T(\mathbf{x}, t) dv = \sum_{i=1}^{\infty} A_i(t) \int_V w(\mathbf{x}) \psi(\mu_j, \mathbf{x}) \psi(\mu_i, \mathbf{x}) dv \quad (2.5.a)$$

Aplicando-se a relação de ortogonalidade das autofunções, apresentada em (2.4.b) na equação anterior, encontra-se:

$$A_j(t) = \frac{1}{N_j} \int_V w(\mathbf{x}) \psi(\mu_j, \mathbf{x}) T(\mathbf{x}, t) dv \quad (2.5.b)$$

onde  $N_j$  é a integral de normalização, ou simplesmente norma, definida por:

$$N_j = \int_V w(\mathbf{x}) [\psi(\mu_j, \mathbf{x})]^2 dv \quad (2.6)$$

As equações (2.2) e (2.5.b) levam à definição do par de transformação integral, o qual é composto pelas fórmulas de transformada e de inversa:

$$\bar{T}_i(t) = \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_V w(\mathbf{x}) \psi(\mu_i, \mathbf{x}) T(\mathbf{x}, t) dv \quad (2.7.a)$$

$$T(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{N_i^{1/2}} \psi(\mu_i, \mathbf{x}) \bar{T}_i(t) \quad (2.7.b)$$

Os potenciais transformados  $\bar{T}_i(t)$  são calculados pela solução do sistema diferencial ordinário que é decorrente da eliminação da coordenada espacial  $\mathbf{x}$  expressa na equação (2.1.a), conforme o procedimento apresentado a seguir.

Aplica-se o operador  $\frac{1}{N_i^{1/2}} \int_V \psi(\mu_i, \mathbf{x}) dv$  sobre a equação (2.1.a), obtendo-se:

$$\frac{d\bar{T}_i(t)}{dt} = \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_V \psi(\mu_i, \mathbf{x}) [\nabla \cdot K(\mathbf{x}) \nabla T(\mathbf{x}, t) - d(\mathbf{x}) T(\mathbf{x}, t) + P(\mathbf{x}, t)] dv \quad (2.8)$$

Similarmente, aplica-se o operador  $\frac{1}{N_i^{1/2}} \int_V T(\mathbf{x}, t) dv$  sobre a equação (2.3.a), resultando:

$$\mu_i^2 \bar{T}_i(t) = \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_V T(\mathbf{x}, t) [-\nabla \cdot K(\mathbf{x}) \nabla \psi(\mu_i, \mathbf{x}) + d(\mathbf{x}) \psi(\mu_i, \mathbf{x})] dv \quad (2.9)$$

Adicionando-se, membro a membro, as equações (2.8) e (2.9), encontra-se o seguinte sistema diferencial ordinário desacoplado:

$$\frac{d\bar{T}_i(t)}{dt} + \mu_i^2 \bar{T}_i(t) = \bar{g}_i(t), \quad t > 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.10.a)$$

onde  $\bar{g}_i(t)$  é definida por

$$\begin{aligned} \bar{g}_i(t) = & \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_V [\psi(\mu_i, \mathbf{x}) \nabla \cdot K(\mathbf{x}) \nabla T(\mathbf{x}, t) - T(\mathbf{x}, t) \nabla \cdot K(\mathbf{x}) \nabla \psi(\mu_i, \mathbf{x})] dv + \\ & + \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_V \psi(\mu_i, \mathbf{x}) P(\mathbf{x}, t) dv \end{aligned} \quad (2.10.b)$$

A primeira integral de volume da equação (2.10.b) é então transformada em uma integral de superfície através da fórmula de Green, resultando:

$$\begin{aligned} \bar{g}_i(t) = & \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_S K(\mathbf{x}) [\psi(\mu_i, \mathbf{x}) \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{n}} - T(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \psi(\mu_i, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}}] ds + \\ & + \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_V \psi(\mu_i, \mathbf{x}) P(\mathbf{x}, t) dv \end{aligned} \quad (2.10.c)$$

O primeiro integrando da equação (2.10.c) é desenvolvido algebricamente, combinando-se as equações de contorno (2.1.c) e (2.3.b), de forma a se obter:

$$K(\mathbf{x}) [\psi(\mu_i, \mathbf{x}) \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{n}} - T(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \psi(\mu_i, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}}] = \phi(\mathbf{x}, t) \frac{\psi(\mu_i, \mathbf{x}) - K(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi(\mu_i, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}}}{\alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x})} \quad (2.11)$$

Das equações (2.10.a), (2.10.c) e (2.11), chega-se ao seguinte sistema transformado:

$$\frac{d\bar{T}_i(t)}{dt} + \mu_i^2 \bar{T}_i(t) = \bar{g}_i(t), \quad t > 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.12.a)$$

onde  $\bar{g}_i(t)$  é dada por,

$$\begin{aligned} \bar{g}_i(t) = & \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_S \phi(\mathbf{x}, t) \frac{\Psi(\mu_i, \mathbf{x}) - K(\mathbf{x}) \frac{\partial \Psi(\mu_i, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}}}{\alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x})} ds + \\ & + \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_V \Psi(\mu_i, \mathbf{x}) P(\mathbf{x}, t) dv \end{aligned} \quad (2.12.b)$$

As condições iniciais requeridas para solução do sistema transformado são obtidas transformando-se a condição inicial, equação (2.1.b), o que é executado utilizando-se a definição do potencial transformado (2.7.a):

$$\bar{T}_i(0) = \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_V w(\mathbf{x}) \Psi(\mu_i, \mathbf{x}) T(\mathbf{x}, 0) dv = \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_V w(\mathbf{x}) \Psi(\mu_i, \mathbf{x}) f(\mathbf{x}) dv \quad (2.12.c)$$

A solução analítica exata do sistema transformado, descrito pelas equações (2.12.a), (2.12.b) e (2.12.c), é dada por:

$$\bar{T}_i(t) = e^{-\mu_i^2 t} \left[ \bar{f}_i + \int_0^t e^{\mu_i^2 r} \bar{g}_i(r) dr \right] \quad (2.13.a)$$

onde

$$\bar{f}_i = \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_V w(\mathbf{x}) \Psi(\mu_i, \mathbf{x}) f(\mathbf{x}) dv \quad (2.13.b)$$

Aplicando-se a equação (2.13.a) sobre a fórmula de inversão, dada pela equação (2.7.b), encontra-se a seguinte formulação explícita para o potencial  $T(\mathbf{x}, t)$ :

$$T(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Psi(\mu_i, \mathbf{x})}{N_i^{1/2}} e^{-\mu_i^2 t} \left[ \bar{f}_i + \int_0^t e^{\mu_i^2 r} \bar{g}_i(r) dr \right] \quad (2.14)$$

É importante observar que para uma determinada ordem de truncamento, à medida que cresce o valor da coordenada temporal, a série (2.14) converge com menos termos. Isto mostra que o uso de aproximações analíticas tende a diminuir consideravelmente o custo computacional da solução em relação aos métodos puramente numéricos.

### 2.1.3 Solução geral do Sistema de EDP's Parabólicas Acopladas

Nesta seção são descritos os formalismos necessários para a solução de um sistema parabólico não-linear acoplado, definido em uma região finita  $V$ , possuindo uma superfície de contorno  $S$  e para  $k=1,2,3$ . Para tanto, levam-se em conta recentes extensões aos fundamentos clássicos da técnica de transformada integral [04,11,21].

$$w_k(\mathbf{x}) \frac{\partial T_k(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + L_k T_k(\mathbf{x}, t) = P_k(\mathbf{x}, t, T_1(\mathbf{x}, t), T_2(\mathbf{x}, t), T_3(\mathbf{x}, t)), \quad \mathbf{x} \in V, \quad t > 0 \quad (2.15.a,b,c)$$

com condições iniciais

$$T_k(\mathbf{x}, t) = f_k(x), \quad \mathbf{x} \in V, \quad t = 0 \quad (2.15.d,e,f)$$

e condições de contorno

$$B_k T_k(\mathbf{x}, t) = \phi_k(\mathbf{x}, t, T_1(\mathbf{x}, t), T_2(\mathbf{x}, t), T_3(\mathbf{x}, t)), \quad \mathbf{x} \in S, \quad t > 0 \quad (2.15.g,h,i)$$

os operadores lineares  $L_k$  e  $B_k$  são definidos pelas expressões

$$L_k \equiv -\nabla \cdot K_k(\mathbf{x}) \nabla + d_k(\mathbf{x}) \quad (2.15.j,k,l)$$

$$B_k \equiv \alpha_k(\mathbf{x}) + \beta_k(\mathbf{x}) K_k(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \quad (2.15.m,n,o)$$

onde  $T_k(\mathbf{x}, t)$  são os potenciais a serem determinados.  $P_k(\mathbf{x}, t, T_1(\mathbf{x}, t), T_2(\mathbf{x}, t), T_3(\mathbf{x}, t))$  e  $\phi_k(\mathbf{x}, t, T_1(\mathbf{x}, t), T_2(\mathbf{x}, t), T_3(\mathbf{x}, t))$  incorporam os termos não-homogêneos, não-lineares e de acoplamento presentes no sistema. Os demais termos são idênticos aos definidos nas equações (2.1.a-e).

Sem perda de generalidade, utilizado os mesmos formalismos da GITT descritos na seção anterior, definem-se a seguir, para  $k=1,2,3$ , os problemas auxiliares desacoplados associados, os pares de transformação integral e o sistema transformado, relativos ao sistema de equações (2.15.a-o):

a) Problemas auxiliares

equações governantes

$$\mu_{ki}^2 w_k(\mathbf{x}) \psi_k(\mu_{ki}, \mathbf{x}) = L_k \psi_k(\mu_{ki}, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V \quad (2.16.a,b,c)$$

condições de contorno

$$B_k \psi_k(\mu_{ki}, \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S \quad (2.16.d,e,f)$$

A escolha de problemas auxiliares desacoplados constitui um importante passo, pois evita definitivamente o aparecimento de eventuais autovalores complexos [04,11,14,54].

b) Pares de transformação integral  
fórmulas de transformada

$$\bar{T}_{ki}(t) = \frac{1}{N_{ki}^{1/2}} \int_V w_k(\mathbf{x}) \psi_k(\mu_{ki}, \mathbf{x}) T(\mathbf{x}, t) dv \quad (2.17.a,b,c)$$

fórmulas de inversão

$$T_k(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{N_{ki}^{1/2}} \psi_k(\mu_{ki}, \mathbf{x}) \bar{T}_{ki}(t) \quad (2.17.d,e,f)$$

onde  $N_{ki}$  são as integrais de normalização, ou simplesmente normas, definidas por

$$N_{ki} = \int_V w_k(\mathbf{x}) [\psi_k(\mu_{ki}, \mathbf{x})]^2 dv \quad (2.18.a,b,c)$$

c) Sistema transformado acoplado

$$\frac{d\bar{T}_{ki}(t)}{dt} + \mu_{ki}^2 \bar{T}_{ki}(t) = \bar{g}_{ki}(t, T_1(\mathbf{x}, t), T_2(\mathbf{x}, t), T_3(\mathbf{x}, t)), \quad t > 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.19.a,b,c)$$

com condições iniciais

$$\bar{T}_{ki}(0) = \bar{f}_{ki} = \frac{1}{N_{ki}^{1/2}} \int_V w_k(\mathbf{x}) \psi_k(\mu_{ki}, \mathbf{x}) f_k(\mathbf{x}) dv \quad (2.19.d,e,f)$$

onde  $\bar{g}_{ki}(t, T_1(\mathbf{x}, t), T_2(\mathbf{x}, t), T_3(\mathbf{x}, t))$  são funções definidas por

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ki}(t, T_1(\mathbf{x}, t), T_2(\mathbf{x}, t)) &= \frac{1}{N_{ki}^{1/2}} \int_V \psi_k(\mu_{ki}, \mathbf{x}) P_k(\mathbf{x}, t, T_1(\mathbf{x}, t), T_2(\mathbf{x}, t), T_3(\mathbf{x}, t)) dv + \\ &+ \frac{1}{N_{ki}^{1/2}} \int_S \phi_k(\mathbf{x}, t, T_1(\mathbf{x}, t), T_2(\mathbf{x}, t), T_3(\mathbf{x}, t)) \frac{\psi_k(\mu_{ki}, \mathbf{x}) - K_k(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi_k(\mu_{ki}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}}}{\alpha_k(\mathbf{x}) + \beta_k(\mathbf{x})} ds \end{aligned} \quad (2.19.g,h,i)$$

Observando que as equações (2.19.g,h,i) dependem dos valores dos potenciais  $T_1(\mathbf{x}, t)$ ,  $T_2(\mathbf{x}, t)$  e  $T_3(\mathbf{x}, t)$  ao longo do contorno  $S$ , conforme o tipo da condição do contorno existente no problema governante, torna-se necessário uma análise da taxa de convergência numérica nesta região. A utilização direta das fórmulas de inversão definidas nas equações (2.17.d,e,f) é possível, contudo não representa a melhor alternativa, uma vez que a série pode convergir mais lentamente próximo ao contorno  $S$ . Isto decorre devido as autofunções não obedecerem às condições de contorno não-homogêneas presentes no sistema original. Outras alternativas foram postuladas [14,20,55], visando melhorar o comportamento da taxa de convergência numérica da solução. Sem perda de generalidade, o sistema transformado assume a seguinte forma:

sistema transformado acoplado

$$\frac{d\bar{T}_{1i}(t)}{dt} + \mu_{1i}^2 \bar{T}_{1i}(t) = \bar{g}_{1i}^*, \quad t > 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.20.a)$$

$$\frac{d\bar{T}_{2j}(t)}{dt} + \mu_{2j}^2 \bar{T}_{2j}(t) = \bar{g}_{2j}^*, \quad t > 0, \quad j = 1, 2, \dots \quad (2.20.b)$$

$$\frac{d\bar{T}_{3l}(t)}{dt} + \mu_{3l}^2 \bar{T}_{3l}(t) = \bar{g}_{3l}^*, \quad t > 0, \quad l = 1, 2, \dots \quad (2.20.c)$$

condições iniciais

$$\bar{T}_{1i}(0) = \bar{f}_{1i} \quad (2.20.d)$$

$$\bar{T}_{2j}(0) = \bar{f}_{2j} \quad (2.20.e)$$

$$\bar{T}_{3l}(0) = \bar{f}_{3l} \quad (2.20.f)$$

onde

$$\bar{g}_{1i}^* = \bar{g}_{1i}(t, \bar{T}_{1n}(t), \bar{T}_{2m}(t), \bar{T}_{3p}(t)), \quad n, m, p = 1, 2, \dots \quad (2.20.g)$$

$$\bar{g}_{2j}^* = \bar{g}_{2j}(t, \bar{T}_{1n}(t), \bar{T}_{2m}(t), \bar{T}_{3p}(t)), \quad n, m, p = 1, 2, \dots \quad (2.20.h)$$

$$\bar{g}_{3l}^* = \bar{g}_{3l}(t, \bar{T}_{1n}(t), \bar{T}_{2m}(t), \bar{T}_{3p}(t)), \quad n, m, p = 1, 2, \dots \quad (2.20.i)$$

As equações (2.20.a-i) definem um problema de valor inicial não-linear acoplado, constituído por um conjunto infinito de equações. A solução deste sistema, que permite explicitar os potenciais  $T_k(\mathbf{x}, t)$ , pode ser obtida computacionalmente após o truncamento do sistema em uma ordem finita, suficientemente grande, segundo um valor prescrito de erro numérico. Com o truncamento, o sistema infinito é reduzido a uma ordem finita de  $N \times M \times P$  equações ordinárias acopladas. Assim, como passo inicial visando truncar as equações (2.20.a,b,c), limita-se a quantidade de autovalores  $\mu_{1i}$ ,  $\mu_{2j}$  e  $\mu_{3l}$ , tomando  $i=1, 2, \dots, N$ ,  $j=1, 2, \dots, M$  e  $l=1, 2, \dots, P$ . Em seguida, para truncar as equações (2.20.g,h,i), analogamente se limita a quantidade de potenciais transformados  $\bar{T}_{1n}(t)$ ,  $\bar{T}_{2m}(t)$  e  $\bar{T}_{3p}(t)$ , com  $n=1, 2, \dots, N$ ,  $m=1, 2, \dots, M$  e  $p=1, 2, \dots, P$ .

Com base nas equações (2.20.d,e,f), determinam-se os valores iniciais correspondentes ao sistema truncado:  $\bar{f}_{1i}$ , com  $i=1, 2, \dots, N$ ,  $\bar{f}_{2j}$ , com  $j=1, 2, \dots, M$  e  $\bar{f}_{3l}$ , com  $l=1, 2, \dots, P$ .

Agora, as fórmulas de inversão definidas nas equações (2.17.d,e,f) são respectivamente truncadas em  $N$ ,  $M$  e  $P$  termos. Visando encontrar a ordem de truncamento (valores  $M$ ,  $N$  e  $P$ ) que satisfaça a tolerância prescrita de erro, deve-se verificar a convergência numérica das séries de expansão de autofunções (fórmulas de inversão) após sucessivas variações adotadas na ordem de truncamento do sistema transformado.

Analisando-se o problema de valor inicial, este pode ser resolvido numericamente recorrendo-se ao uso de matrizes de autovalores ou subrotinas científicas, disponíveis em sistemas de computação numérica, citando-se o IMSL [28] ou em sistemas de computação simbólica, como o *Mathematica* [22,56]. As ordens de truncamento necessárias para alcançar uma determinada precisão prescrita podem ser minimizadas adotando-se o uso de procedimentos adaptativos. Calculados os potenciais transformados, o passo seguinte é utilizar as fórmulas de inversão, obtendo-se assim os potenciais desejados.

Destaca-se que quando se utilizam métodos com características analíticas, como a GITT, o custo computacional de processamento de um problema tridimensional é próximo ao de um problema unidimensional. Por outro lado, ao se utilizar métodos puramente numéricos para se executar as mesmas tarefas, a variação do custo de processamento pode sofrer incremento da ordem de cem vezes.

## 2.2 Computação Simbólica

A computação simbólica é caracterizada como uma linguagem de programação de alto nível que disponibiliza para o usuário a criação de documentos interativos. Estes permitem a edição de texto e definição de rotinas sistematizadas para execução de conjuntos de tarefas necessárias ao desenvolvimento de cálculo analítico e/ou numérico, além de visualização gráfica de funções ou arquivos de dados. Estes recursos permitem mais facilmente ao usuário implementar programas avançados para tratamento simultâneo simbólico (manipulação analítica) e numérico de problemas relacionados à matemática, física e engenharias.

A computação simbólica nasceu da necessidade de se atribuir à máquina a cansativa tarefa de manipular algebricamente extensas expressões matemáticas, a fim de permitir aos usuários o estudo e análise de modelos cada vez mais complexos. A máquina analítica, idealizada por Charles Babbage em 1812, deveria processar com rapidez dados numéricos e até simbólicos, desde que adequadamente representados. Entretanto, foi necessário pouco mais de um século até o surgimento dos primeiros computadores eletrônicos nos anos quarenta, que auxiliavam no tratamento de problemas aplicados a ciência e tecnologia (C&T), via o uso de métodos puramente numéricos [57]. As primeiras referências documentadas sobre o uso da manipulação de símbolos por computador datam de 1953 [57,58,59]. Durante a década de cinquenta, surgiram programas computacionais capazes de manipular polinômios, resolver equações e calcular derivadas de funções. Em 1966 houve as duas primeiras conferências sobre cálculo simbólico, ocorridas em Washington e Pisa [57]. No início da década de 70, já existiam programas computacionais que integravam funções analiticamente e, ao final da mesma, outros surgiram para a solução simbólica de equações diferenciais e integrais [57].

Tradicionalmente, a computação simbólica é utilizada para execução automática de operações de aritmética, álgebra e cálculo avançado [56,57,60]. Aliado a isto, um grande número de funções matemáticas se encontram implementadas nos sistemas de computação simbólica, SCS, o que aumenta consideravelmente o potencial aplicativo. Muitos SCS, utilizando técnicas de programação baseadas em regras e programação funcional permitem que se definam novas funções matemáticas a partir das operações e funções já disponíveis.

As operações de cálculo avançado realizadas pelos SCS envolvem diferenciação, integração, cálculo de limites, cálculo vetorial, representação em séries de funções, entre outras. Estes recursos têm sido utilizados sistematicamente no tratamento de inúmeros problemas aplicados a C&T [01,21,60].

No caso de atividades de pesquisa e modelagem avançada, pode reduzir significativamente o trabalho necessário para o desenvolvimento de cálculos analíticos, eliminando assim tediosos e desnecessários esforços de concentração mental, associados à manipulação de extensas expressões matemáticas repetitivas e mecânicas. Como consequência, é possível se obter um tratamento analítico mais rápido, recursivo e confiável.

Como exemplo das últimas tendências em SCS, cita-se o *Mathematica*, que foi lançado em 1988 pela *Wolfram Research*, que permite a integração de recursos de computação numérica, simbólica e métodos analítico-numéricos, dentro de um ambiente de programação totalmente heterogêneo.

Em nível de avanços conseguidos em modelagem avançada aplicada a C&T, cita-se o aparecimento de livros e revista internacional que oferecem soluções melhoradas nos aspectos

de taxa de convergência numérica, estabilidade numérica e tarefas associadas ao programador relativas à construção e implementação algorítmicas.

### 2.3 Problema de Secagem de Luikov

A análise via simulação computacional do comportamento dinâmico das distribuições simultâneas de temperatura, umidade e pressão no interior de meio capilar poroso é de fundamental importância para a melhoria do controle de processos industriais e também para o desenvolvimento das ciências térmicas, física e engenharias.

Luikov [05,06,61,62], partindo de conceitos da termodinâmica de processos irreversíveis estudou este fenômeno, representando-o matematicamente por um sistema de equações diferenciais acopladas. Philip e De Vries [63] postularam um modelo do mesmo tipo. Fulford [64], Rossen e Hayakawa reanalisam a teoria de secagem proposta por Luikov, segundo os aspectos que envolvem os conceitos físicos e a publicam sob forma de revisão [42,66,67]. Em linhas gerais, mostram uma análise da influência qualitativa dos parâmetros adimensionais sobre as variações dos potenciais de temperatura e umidade durante o processo de secagem.

Em uma das variantes de sua teoria, Luikov solucionou um sistema de equações lineares, aplicando um método de características fortemente analíticas, caracterizado pela técnica de transformada de Laplace, segundo diferentes tipos de condições de contorno e sistemas de coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas. Estas soluções podem ser consideradas como casos especiais dos resultados obtidos usando a metodologia proposta por Mikhailov [68].

Devido à complexidade matemática encontrada em determinadas variantes do problema de Luikov, existem soluções analíticas somente para certas versões particulares, onde as propriedades termofísicas e os coeficientes das equações são constantes. Em determinadas variantes deste problema, o trabalho torna-se mais tedioso quando ocorre a possibilidade de se encontrar autovalores complexos, como descrito nas metodologias desenvolvidas por Lobo et al. [69] e Liu e Cheng [70], ou quando se precisa resolver um problema multidimensional e com multicamadas.

Muitas aproximações numéricas propostas para solucionar as equações de Luikov não lineares compreendem variações dos métodos clássicos tais como os métodos de elementos finitos e diferenças finitas, bem como contornos variáveis e métodos variacionais.

Com o advento da GITT a partir do final da década de oitenta foram publicados trabalhos mostrando soluções de variantes do problema de Luikov, desenvolvidas através de procedimentos sistemáticos, sendo observado que algumas soluções anteriormente apresentadas estavam incompletas [54,70].

No próximo capítulo aborda-se uma variante do problema de Luikov, apresentando-se a análise do modelo físico, caracterização do modelo matemático associado e a metodologia de solução.

## CAPÍTULO 3

### **PROBLEMA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR E MASSA EM UM MEIO CAPILAR POROSO SOB EFEITO DA PRESSÃO**

Visando uma aplicação dos formalismos da técnica de transformada integral generalizada utilizados no tratamento do problema parabólico, acoplado e não-linear tratado na sessão 2.1.3, adota-se uma variante do modelo de Luikov [05-10], composto por três equações diferenciais parciais, lineares e acopladas, oriundas dos balanços de energia, massa e da equação de mudança de pressão, aplicados no interior de um meio capilar poroso e isotrópico.

#### **3.1. Modelo Físico**

A interrelação entre a transferência de calor e massa em meios capilares porosos levando em conta o efeito termogradiente foi primeiramente estabelecida por Luikov [05,06,61,62,65]. Partindo de fundamentos da termodinâmica de processos irreversíveis, o mesmo definiu um sistema acoplado de equações diferenciais parciais oriundos das equações de balanço e de mudança da pressão. O problema com dois graus de liberdade assume que a pressão é constante através do domínio de interesse. Entretanto, durante um prolongado período de secagem, um gradiente de pressão total se desenvolve dentro do material úmido. Como resultado uma transferência adicional de umidade e calor ganha lugar devido ao movimento de filtração composta de fases líquida e vapor. O gradiente de pressão total aparece dentro do material como resultado da evaporação e da resistência do esqueleto poroso durante o movimento do vapor. O gradiente de pressão passa a ser significativo quando o processo de secagem se torna mais intenso. Desta forma, Luikov [07-09] introduziu efeito da pressão e definiu o sistema acoplado de equações diferenciais parciais que descrevem as interrelações entre transferência de calor, massa e pressão em um corpo capilar poroso.

A fim de definir a transferência de umidade por difusão e filtração são necessárias três equações diferenciais parciais interdependentes que têm como variáveis a serem numericamente determinadas os potenciais de pressão, temperatura e umidade. Na derivação destas equações as seguintes hipóteses são feitas [07]:

- (i) a massa é presente apenas nas fases de líquido e vapor;
- (ii) as temperaturas do líquido, vapor e do corpo seco são iguais em um elemento diferencial volumétrico;
- (iii) reações químicas associadas não são levadas em conta.
- (iv) mudanças dimensionais que ocorram dentro do material podem ser ignoradas.

Os seguintes subscritos são usados para identificar os componentes materiais:

- 0 – esqueleto do corpo poroso
- 1 – vapor
- 2 – líquido
- 3 – sólido
- 4 – gás inerte

Nas equações seguintes,  $T$ ,  $U$  e  $P$  representam, respectivamente os potenciais de temperatura e de umidade e a pressão total do ar úmido dentro do corpo.

Equação de conservação de massa.

O balanço de massa para um dos materiais vapor ou líquido segue a lei da conservação de massa,  $i = 0$  a  $4$ :

$$\frac{\partial(m_i \rho_0)}{\partial t} = -\text{div}(j_{i,dif} + j_{i,fil}) + I_i \quad (3.1)$$

Onde,  $m_i$  representa o conteúdo de massa,  $\rho_0$  é a densidade,  $j_{i,dif}$  é a densidade do fluxo de massa transferida por difusão,  $j_{i,fil}$  é a densidade do fluxo de massa transferida por filtração e  $I_i$  representa a capacidade volumétrica da superfície do material.

O fluxo de massa não é apenas relacionado com o gradiente de concentração de umidade, que é conhecido como efeito Soret, isto é,

$$j_{dif} = -a_m \rho_0 (\nabla m + \delta \nabla T) \quad (3.2)$$

Onde,  $a_m$  representa difusividade de massa e  $\delta$  é o coeficiente termogradiente.

A presença do gradiente de pressão total dentro do corpo capilar poroso produz transferência da mistura de líquido e vapor por efeito de filtração molar, que é descrita como segue:

$$j_{fil} = j_{1,fil} + j_{2,fil} = -k_p \nabla P \quad (3.3)$$

Onde,  $k_p$  é o coeficiente de filtração de massa.

A equação (3.1) representa o balanço de massa para o  $i$ -ésimo material componente. Entretanto, para o material como um todo o balanço total de massa é obtido somando os balanços dos componentes, isto é  $i = 0, 1, 2, 3, 4$ . Entretanto, a soma das fontes e sumidouros para todos materiais é igual a zero, então, após substituição nas equações (3.2) e (3.3), a equação (3.1) fica

$$\frac{\partial(m_i \rho_0)}{\partial t} = \text{div}(a_m \rho_0 \nabla m + a_m \rho_0 \delta \nabla T + k_p \nabla P) \quad (3.4)$$

A expressão de Luikov para o conteúdo de umidade em termos do potencial de umidade estipula que  $c_m$  é constante. A equação (3.4) vem a ser então

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a_m \nabla^2 m + \frac{a_m \delta}{c_m} \nabla^2 T + \frac{k_p}{c_m \rho_0} \nabla^2 P \quad (3.5)$$

Onde,  $c_m$  representa a capacidade mássica.

Equação da conservação de energia térmica.

O balanço de energia térmica dentro do corpo capilar poroso é representado por

$$\rho_0 c_q \frac{\partial T}{\partial t} = -div j_q - \sum_{i=0}^4 h_i I_i \quad (3.6)$$

Onde,  $c_q$  representa a capacidade térmica,  $j_q$  é o fluxo de calor e  $h_i$  corresponde à entalpia específica.

A transferência de calor por condução é normalmente relacionada com o gradiente de temperatura, mas no caso de um sistema acoplado, ele é também relacionado, embora fracamente, com o gradiente de umidade, e isto é conhecido como o efeito Dufour. Entretanto, isto é usualmente considerado insignificante para corpos capilares porosos, então,

$$j_q = -k_q \nabla T \quad (3.7)$$

Onde,  $k_q$  é o coeficiente de condutividade térmica.

O termo fonte ou sumidouro é devido à mudança de fase da água contida dentro do corpo, então

$$\sum_{i=0}^4 h_i I_i = -\lambda div \left( a_{m2} \rho_0 \left[ \nabla m + \delta \nabla T + \frac{k_p}{a_m \rho_0} \nabla P \right] \right) \quad (3.8)$$

Substituindo as equações (3.7) e (3.8) na equação (3.6) e rearranjando, obtém-se

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\varepsilon \lambda c_m a_m}{c_q} \nabla^2 U + \left( \frac{k_q}{\rho_0 c_q} + \frac{\varepsilon \lambda \delta a_m}{c_q} \right) \nabla^2 T + \frac{\varepsilon \lambda k_p}{\rho_0 c_q} \nabla^2 P \quad (3.9)$$

Nas equações acima,  $\varepsilon$  é o critério de mudança de fase do líquido no interior do meio poroso e  $l$  é o calor latente de vaporização.

Equação da Pressão

Para um sistema fechado, uma equação representando a mudança na pressão é requerida. A difusão de vapor e ar em capilares é quantitativamente menor se comparada com a transferência por filtração, isto é

$$j_1 + j_4 = -k_p \nabla P \quad (3.10)$$

Onde,  $j_i$  é a densidade do fluxo de massa transferida.

Somando as equações diferenciais de transferência de massa com respeito a  $i = 1$  e  $4$ , resulta

$$\frac{\partial(\rho_0(u_1 + u_4))}{\partial t} = -\text{div}(u_1 + u_4) + I_1 + I_4 \quad (3.11)$$

O conteúdo de massa da mistura gás-vapor é determinado pela pressão e temperatura:

$$\rho(u_1 + u_4) = \frac{PM}{RT} \Pi b \quad (3.12)$$

Diferenciando, assumindo  $T^2 \gg c_p$  e  $T \gg db$  e fazendo

$$c_p = \frac{\Pi b M}{TR \rho_0} \quad (3.13)$$

obtemos

$$\frac{\partial(u_1 + u_4)}{\partial t} = c_p \frac{\partial P}{\partial t} \quad (3.14)$$

Nas equações acima,  $c_p$  é a capacidade de filtração mássica,  $M$  representa a massa molecular do ar úmido,  $R$  é a constante universal de gás,  $b$  corresponde à saturação nos capilares do corpo e  $\Pi$  representa a porosidade média do corpo.

Substituindo as equações (3.10) e (3.14) na equação (3.11), resulta

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{k_p}{\rho_0 c_p} \nabla^2 P - \frac{\varepsilon c_m}{c_p} \frac{\partial U}{\partial t} \quad (3.15)$$

então

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{a_m c_m \varepsilon}{c_p} \nabla^2 U - \frac{a_m \delta \varepsilon}{c_p} \nabla^2 T + a_p (1 - \varepsilon) \nabla^2 P \quad (3.16)$$

Condições de Contorno

As condições de contorno associadas com estas equações são [07]

$$U = U_w \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (3.17a)$$

$$K_m \frac{\partial U}{\partial n} + j_m + \frac{k_m \delta}{C_m} \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha_u (U - U_a) = 0 \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (3.17.b)$$

$$T = T_w \quad \text{em } \Gamma_3 \quad (3.17.c)$$

$$k_q \frac{\partial T}{\partial n} + j_q + \alpha_q (T - T_a) + \alpha_u (1 - \varepsilon) (U - U_a) = 0 \quad \text{em } \Gamma_4 \quad (3.17.d)$$

$$P = P_w \quad \text{em } \Gamma_5 \quad (3.17.e)$$

Nas equações acima,  $k_m$  é o coeficiente de condutividade mássica,  $\alpha_u$  é o coeficiente de transferência convectiva de massa e  $\alpha_q$  é o coeficiente de transferência convectiva de calor.

O primeiro termo na equação (3.17.d) representa a contribuição da transferência de calor no interior do meio capilar poroso, o segundo e o terceiro termos expressam a quantidade de calor fornecido pela superfície, enquanto o último termo é a contribuição do calor consumido na mudança de fase do líquido.

Para a equação (3.17.b) o primeiro termo descreve o fornecimento de umidade da superfície para o interior do meio capilar poroso sob influência do gradiente de umidade, enquanto os dois últimos termos descrevem a contribuição da transferência de umidade devido ao efeito termogradiante e a transferência convectiva.

As equações (3.17.a), (3.17.c) e (3.17.e) descrevem as condições de contorno de Dirichlet para umidade, temperatura e pressão respectivamente.

As equações (3.17.b) e (3.17.c) podem ser reescritas na forma

$$K_{11} \frac{\partial T}{\partial n} + J_q^* = 0 \quad (3.18)$$

$$K_{22} \frac{\partial U}{\partial n} + J_m^* = 0 \quad (3.19)$$

onde,

$$J_q^* = A_q (T - T_a) + A_l (U - U_a) + J_q$$

$$J_m^* = A_\delta (T - T_a) + A_m (U - U_a) + J_m$$

$$A_l = \frac{\lambda \alpha_u}{k_q} (1 - \varepsilon) K_{11} \quad A_q = \frac{K_{11} \alpha_q}{k_q} \quad J_m = K_{22} \left[ \frac{j_m}{k_m} - \frac{\delta j_q}{c_m k_q} \right]$$

$$A_m = K_{22} \left[ \frac{1}{k_m} - \frac{\delta \lambda}{c_m} (1 - \varepsilon) \right] \quad A_\delta = -\frac{K_{22} \delta \alpha_q}{c_m k_q} \quad J_q = \frac{K_{11}}{k_q}$$

As equações diferenciais parciais para temperatura, pressão e umidade não são simétricas; entretanto, multiplicando a equação (3.5) por  $\rho_0 c_q \delta / c_m$ , a equação (3.9) por  $\varepsilon \lambda \rho_0 c_m$  e a equação (3.16) por  $-\lambda \rho_0 c_p k_p / k_m$  nós podemos produzir um conjunto de equações simétricas, isto é,

$$\begin{aligned}
C_q \frac{\partial T}{\partial t} &= [K_{11} \nabla^2 T + K_{12} \nabla^2 U + K_{13} \nabla^2 P] \\
C_m \frac{\partial U}{\partial t} &= [K_{21} \nabla^2 T + K_{22} \nabla^2 U + K_{23} \nabla^2 P] \\
C_p \frac{\partial P}{\partial t} &= [K_{31} \nabla^2 T + K_{32} \nabla^2 U + K_{33} \nabla^2 P]
\end{aligned} \tag{3.20}$$

onde,

$$\begin{aligned}
C_q &= c_q \rho_0 \delta' & K_{11} &= (k_q + \varepsilon \lambda k_m) \delta' & K_{12} &= K_{21} = \varepsilon \lambda \delta' k_m \\
C_m &= \varepsilon \lambda \rho_0 c_m & K_{22} &= \varepsilon \lambda k_m & K_{13} &= K_{31} = \varepsilon \lambda k_p \delta' \\
C_p &= -\lambda \rho_0 c_p k_p / k_m & K_{33} &= \lambda k_p^2 (\varepsilon - 1) / k_m & K_{23} &= K_{32} = \varepsilon \lambda k_p
\end{aligned}$$

onde,

$$m = c_m U \quad \text{e} \quad \delta' = \delta / c_m$$

### 3.2. Modelo Matemático

De forma sistemática o modelo matemático completo do problema de Luikov em análise pode ser enunciado:

Equações Governantes

$$\begin{aligned}C_q \frac{\partial T}{\partial t} &= K_{11} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + K_{12} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + K_{13} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \\C_m \frac{\partial U}{\partial t} &= K_{21} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + K_{22} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + K_{23} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \\C_p \frac{\partial P}{\partial t} &= K_{31} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + K_{32} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + K_{33} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\end{aligned}\tag{3.21.a,b,c}$$

Condições Iniciais

$$\begin{aligned}T(x,0) &= T_0 \\U(x,0) &= U_0 \\P(x,0) &= P_0\end{aligned}\tag{3.22.a,b,c}$$

Condições de Contorno

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=0} = 0\tag{3.23.a,b,c}$$

$$\begin{aligned}T(L,t) &= T_B \\U(L,t) &= U_B \\P(L,t) &= P_B\end{aligned}\tag{3.24.a,b,c}$$

Onde,

$$\begin{bmatrix} C_q \\ C_m \\ C_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_q \rho_0 \delta' \\ \varepsilon \lambda \rho_0 c_m \\ \frac{\lambda \rho_0 c_p k_p}{k_m} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (k_q + \varepsilon \lambda k_m) \delta' & \varepsilon \lambda \delta' k_m & \varepsilon \lambda \delta' k_p \\ \varepsilon \lambda \delta' k_m & \varepsilon \lambda k_m & \varepsilon \lambda k_p \\ \varepsilon \lambda \delta' k_p & \varepsilon \lambda k_p & \frac{\lambda k_p^2 (\varepsilon - 1)}{k_m} \end{bmatrix} \quad (3.25.a,b,c)$$

$$\delta' = \frac{\delta}{c_m}$$

Nas equações acima,

$T \equiv T(x,t)$  representa o potencial de temperatura

$U \equiv U(x,t)$  expressa o potencial de umidade

$P \equiv P(x,t)$  representa o potencial de pressão

Antes de se proceder ao uso dos formalismos da GITT para resolver o problema acima formulado, este é criticamente analisado. Inicialmente verifica-se que o mesmo não é homogêneo no contorno, o que requer o uso de termos filtro [05,14], visando a posterior obtenção de expansões de autofunções com melhor convergência numérica, principalmente nas proximidades do contorno  $x = L$ . Isto é possível a partir da escolha de filtros que incorporem as soluções de regime permanente ( $\theta_{1P}(x)$ ,  $\theta_{2P}(x)$  e  $\theta_{3P}(x)$ ) para o problema dado, que são determinadas resolvendo-se o problema estacionário associado, resultante da substituição de  $T(x,t)$  por  $\theta_{1P}(x)$ ,  $U(x,t)$  por  $\theta_{2P}(x)$  e  $P(x,t)$  por  $\theta_{3P}(x)$ , nas equações (3.21.a,b,c), (3.23.a,b,c) e (3.24.a,b,c). Sem perda de generalidade, a solução do problema estacionário associado é facilmente calculável e expressa por:

$$\begin{aligned} \theta_{1P}(x) &= T_B \\ \theta_{2P}(x) &= U_B \\ \theta_{3P}(x) &= P_B \end{aligned} \quad (3.26.a,b,c)$$

Os potenciais desejados agora são definidos em termos das funções filtro obtidas,  $\theta_{1P}(x)$ ,  $\theta_{2P}(x)$  e  $\theta_{3P}(x)$ , adicionados dos potenciais homogêneos  $\theta_{1H}(x,t)$ ,  $\theta_{2H}(x,t)$  e  $\theta_{3H}(x,t)$ :

$$T(x,t) = \theta_{1P}(x) + \theta_{1H}(x,t) = T_B + \theta_{1H}(x,t) \quad (3.27.a)$$

$$U(x,t) = \theta_{2P}(x) + \theta_{2H}(x,t) = U_B + \theta_{2H}(x,t) \quad (3.27.b)$$

$$P(x,t) = \theta_{3P}(x) + \theta_{3H}(x,t) = P_B + \theta_{3H}(x,t) \quad (3.27.c)$$

As definições dadas pelas equações (3.27.a), (3.27.b) e (3.27.c) são aplicadas sobre o sistema original, dado pelas equações (3.21.a,b,c), (3.22.a,b,c), (3.23.a,b,c) e (3.24.a,b,c), de forma a obter o seguinte problema homogêneo:

Equações Governantes

$$\begin{aligned} C_q \frac{\partial \theta_{1H}}{\partial t} &= K_{11} \frac{\partial^2 \theta_{1H}}{\partial x^2} + K_{12} \frac{\partial^2 \theta_{2H}}{\partial x^2} + K_{13} \frac{\partial^2 \theta_{3H}}{\partial x^2} \\ C_m \frac{\partial \theta_{2H}}{\partial t} &= K_{21} \frac{\partial^2 \theta_{1H}}{\partial x^2} + K_{22} \frac{\partial^2 \theta_{2H}}{\partial x^2} + K_{23} \frac{\partial^2 \theta_{3H}}{\partial x^2} \\ C_p \frac{\partial \theta_{3H}}{\partial t} &= K_{31} \frac{\partial^2 \theta_{1H}}{\partial x^2} + K_{32} \frac{\partial^2 \theta_{2H}}{\partial x^2} + K_{33} \frac{\partial^2 \theta_{3H}}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (3.28.a,b,c)$$

Condições Iniciais

$$\begin{aligned} \theta_{1H}(x,0) &= T_0 - T_B = F_1 \\ \theta_{2H}(x,0) &= U_0 - U_B = F_2 \\ \theta_{3H}(x,0) &= P_0 - P_B = F_3 \end{aligned} \quad (3.29.a,b,c)$$

Condições de Contorno

$$\left. \frac{\partial \theta_{1H}}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad \left. \frac{\partial \theta_{2H}}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad \left. \frac{\partial \theta_{3H}}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (3.30.a,b,c)$$

$$\begin{aligned} \theta_{1H}(L,t) &= 0 \\ \theta_{2H}(L,t) &= 0 \\ \theta_{3H}(L,t) &= 0 \end{aligned} \quad (3.31.a,b,c)$$

### 3.3. Solução por Transformada Integral

Para aplicar a metodologia desenvolvida no item 2.1.3 (que tratou da solução geral via transformada integral do sistema de EDP's parabólicas acopladas) ao modelo matemático apresentado na sessão anterior e que foi desenvolvido a partir do problema de Luikov, doravante se aplicam os formalismos da GITT às Equações (3.28 a 3.30). Sem perda de generalidade, para obtenção do sistema transformado associado, adotam-se, os seguintes problemas auxiliares associados do tipo Sturm-Liouville [53]:

Problemas Auxiliares Associados

$$\Psi_j \equiv \Psi_j(x), \quad j = 1,2,3$$

$$\frac{d^2\Psi_1}{dx^2} + \mu_1^2\Psi_1 = 0 \quad \left. \frac{d\Psi_1}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad \Psi_1 = 0|_{x=L} \quad (3.32.a,b,c)$$

$$\frac{d^2\Psi_2}{dx^2} + \mu_2^2\Psi_2 = 0 \quad \left. \frac{d\Psi_2}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad \Psi_2 = 0|_{x=L} \quad (3.33.a,b,c)$$

$$\frac{d^2\Psi_3}{dx^2} + \mu_3^2\Psi_3 = 0 \quad \left. \frac{d\Psi_3}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad \Psi_3 = 0|_{x=L} \quad (3.34.a,b,c)$$

Os problemas de valores de contorno que constituem os problemas auxiliares acima, apresentam como soluções os seguintes conjuntos de auto-valores  $(\mu_{1i}, \mu_{2i}, \mu_{3i})$ , com as suas respectivas auto-funções associadas  $(\Psi_{1i}, \Psi_{2i}, \Psi_{3i})$ :

$$\Psi_{1i} = \cos \mu_{1i}x \quad \mu_{1i} = \frac{(i-1/2)\pi}{L} \quad (3.35.a,b)$$

$$\Psi_{2i} = \cos \mu_{2i}x \quad \mu_{2i} = \frac{(i-1/2)\pi}{L} \quad (3.36.a,b)$$

$$\Psi_{3i} = \cos \mu_{3i}x \quad \mu_{3i} = \frac{(i-1/2)\pi}{L} \quad (3.37.a,b)$$

$$i = 1,2,3,\dots \quad (3.38)$$

## Normas

$$\begin{aligned}
 N_{1i} &= \int_0^L \Psi_{1i}^2 dx = \frac{L}{2} \\
 N_{2i} &= \int_0^L \Psi_{2i}^2 dx = \frac{L}{2} \\
 N_{3i} &= \int_0^L \Psi_{3i}^2 dx = \frac{L}{2}
 \end{aligned} \tag{3.39.a,b,c}$$

## Fórmulas de Transformada

$$\begin{aligned}
 \bar{\theta}_{1i} &\equiv \bar{\theta}_{1i}(t) \quad \bar{\theta}_{2i} \equiv \bar{\theta}_{2i}(t) \quad \bar{\theta}_{3i} \equiv \bar{\theta}_{3i}(t) \\
 \bar{\theta}_{1i} &= \frac{1}{N_{1i}^{1/2}} \int_0^L \Psi_{1i} \theta_{1h} dx \\
 \bar{\theta}_{2i} &= \frac{1}{N_{2i}^{1/2}} \int_0^L \Psi_{2i} \theta_{2h} dx \\
 \bar{\theta}_{3i} &= \frac{1}{N_{3i}^{1/2}} \int_0^L \Psi_{3i} \theta_{3h} dx
 \end{aligned} \tag{3.40.a,b,c}$$

## Fórmulas de Inversão

$$\begin{aligned}
 \theta_{1H} &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{N_{1i}^{1/2}} \Psi_{1i} \bar{\theta}_{1i} \\
 \theta_{2H} &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{N_{2i}^{1/2}} \Psi_{2i} \bar{\theta}_{2i} \\
 \theta_{3H} &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{N_{3i}^{1/2}} \Psi_{3i} \bar{\theta}_{3i}
 \end{aligned} \tag{3.41.a,b,c}$$

Aplicando os operadores  $\frac{1}{N_{1i}^{1/2}} \int_0^L \Psi_{1i} dx$ ,  $\frac{1}{N_{2i}^{1/2}} \int_0^L \Psi_{2i} dx$  e  $\frac{1}{N_{3i}^{1/2}} \int_0^L \Psi_{3i} dx$ , respectivamente, sobre as equações (3.28.a,b,c), obtêm-se, respectivamente, as seguintes equações:

$$\begin{aligned}
C_q \frac{d\bar{\theta}_{1i}}{dt} &= \frac{1}{N_{1i}^{1/2}} \int_0^L \Psi_{1i} K_{11} \frac{\partial^2 \theta_{1H}}{\partial x^2} dx + \frac{1}{N_{1i}^{1/2}} \int_0^L \Psi_{1i} K_{12} \frac{\partial^2 \theta_{2H}}{\partial x^2} dx + \frac{1}{N_{1i}^{1/2}} \int_0^L \Psi_{1i} K_{13} \frac{\partial^2 \theta_{3H}}{\partial x^2} dx \\
C_m \frac{d\bar{\theta}_{2i}}{dt} &= \frac{1}{N_{2i}^{1/2}} \int_0^L \Psi_{2i} K_{21} \frac{\partial^2 \theta_{1H}}{\partial x^2} dx + \frac{1}{N_{2i}^{1/2}} \int_0^L \Psi_{2i} K_{22} \frac{\partial^2 \theta_{2H}}{\partial x^2} dx + \frac{1}{N_{2i}^{1/2}} \int_0^L \Psi_{2i} K_{23} \frac{\partial^2 \theta_{3H}}{\partial x^2} dx \\
C_p \frac{d\bar{\theta}_{3i}}{dt} &= \frac{1}{N_{3i}^{1/2}} \int_0^L \Psi_{3i} K_{31} \frac{\partial^2 \theta_{1H}}{\partial x^2} dx + \frac{1}{N_{3i}^{1/2}} \int_0^L \Psi_{3i} K_{32} \frac{\partial^2 \theta_{2H}}{\partial x^2} dx + \frac{1}{N_{3i}^{1/2}} \int_0^L \Psi_{3i} K_{33} \frac{\partial^2 \theta_{3H}}{\partial x^2} dx
\end{aligned} \tag{3.42.a,b,c}$$

Aplicando os operadores  $\frac{K_{11}}{N_{1i}^{1/2}} \int_0^L \theta_{1H} dx$ ,  $\frac{K_{22}}{N_{2i}^{1/2}} \int_0^L \theta_{2H} dx$  e  $\frac{K_{33}}{N_{3i}^{1/2}} \int_0^L \theta_{3H} dx$ ,

respectivamente, sobre as equações (3.32.a, 3.33.a, 3.34.a) obtemos, respectivamente, as seguintes equações:

$$\begin{aligned}
-K_{11} \mu_{1i}^2 \bar{\theta}_{1i} &= \frac{K_{11}}{N_{1i}^{1/2}} \int_0^L \theta_{1H} \frac{d^2 \Psi_{1i}}{dx^2} dx \\
-K_{22} \mu_{2i}^2 \bar{\theta}_{2i} &= \frac{K_{22}}{N_{2i}^{1/2}} \int_0^L \theta_{2H} \frac{d^2 \Psi_{2i}}{dx^2} dx \\
-K_{33} \mu_{3i}^2 \bar{\theta}_{3i} &= \frac{K_{33}}{N_{3i}^{1/2}} \int_0^L \theta_{3H} \frac{d^2 \Psi_{3i}}{dx^2} dx
\end{aligned} \tag{3.43.a,b,c}$$

Subtraindo, membro a membro, as equações (3.42.a,b,c) das equações (3.43.a,b,c), respectivamente uma a uma, resulta:

$$\begin{aligned}
C_q \frac{d\bar{\theta}_{1i}}{dt} &= -\mu_{1i}^2 K_{11} \bar{\theta}_{1i} - \mu_{1i}^2 K_{12} \bar{\theta}_{2i} - \mu_{1i}^2 K_{13} \bar{\theta}_{3i} \\
C_m \frac{d\bar{\theta}_{2i}}{dt} &= -\mu_{2i}^2 K_{21} \bar{\theta}_{1i} - \mu_{2i}^2 K_{22} \bar{\theta}_{2i} - \mu_{2i}^2 K_{23} \bar{\theta}_{3i} \\
C_p \frac{d\bar{\theta}_{3i}}{dt} &= -\mu_{3i}^2 K_{31} \bar{\theta}_{1i} - \mu_{3i}^2 K_{32} \bar{\theta}_{2i} - \mu_{3i}^2 K_{33} \bar{\theta}_{3i}
\end{aligned} \tag{3.44.a,b,c}$$

- Prova das Equações (3.44.a,b,c):

Subtraindo, membro a membro, as equações (3.42.a) e (3.43.a), resulta:

$$\begin{aligned}
C_q \frac{d\bar{\theta}_{1i}}{dt} + K_{11} \mu_{1i}^2 \bar{\theta}_{1i} &= \frac{K_{11}}{N_{1i}^{1/2}} \int_0^L \left[ \Psi_{1i} \frac{\partial^2 \theta_{1H}}{\partial x^2} - \theta_{1H} \frac{d^2 \Psi_{1i}}{dx^2} \right] dx + \\
&+ \frac{K_{12}}{N_{1i}^{1/2}} \int_0^L \Psi_{1i} \frac{\partial^2 \theta_{2H}}{\partial x^2} dx + \frac{K_{13}}{N_{1i}^{1/2}} \int_0^L \Psi_{1i} \frac{\partial^2 \theta_{3H}}{\partial x^2} dx
\end{aligned}$$

A primeira integral fornece:

$$\int_0^L \left[ \Psi_{1i} \frac{\partial^2 \theta_{1H}}{\partial x^2} - \theta_{1H} \frac{d^2 \Psi_{1i}}{dx^2} \right] dx = \int_S \left[ \Psi_{1i} \frac{\partial \theta_{1H}}{\partial x} - \theta_{1H} \frac{d \Psi_{1i}}{dx} \right] ds = 0$$

A segunda integral resulta em:

$$\begin{aligned} \frac{K_{12}}{N_{1i}^{1/2}} \int_0^L \Psi_{1i} \frac{\partial^2 \theta_{2H}}{\partial x^2} dx &= \frac{K_{12}}{N_{1i}^{1/2}} \int_0^L \Psi_{1i} \frac{\partial^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{N_{2j}^{1/2}} \Psi_{2j} \bar{\theta}_{2j}}{\partial x^2} dx = \frac{K_{12}}{N_{1i}^{1/2}} \int_0^L \Psi_{1i} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\bar{\theta}_{2j}}{N_{2j}^{1/2}} \frac{\partial^2 \Psi_{2j}}{\partial x^2} dx = \\ &= \frac{K_{12}}{N_{1i}^{1/2}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\bar{\theta}_{2j}}{N_{2j}^{1/2}} \int_0^L \Psi_{1i} \frac{\partial^2 \Psi_{2j}}{\partial x^2} dx = \frac{K_{12}}{N_{1i}^{1/2}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\bar{\theta}_{2j}}{N_{2j}^{1/2}} \int_0^L \cos(\mu_{1i} x) \cdot (-\mu_{2j}^2 \cos(\mu_{2j} x)) dx = \\ &= -\frac{K_{12}}{N_{1i}^{1/2}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_{2j}^2 \bar{\theta}_{2j}}{N_{2j}^{1/2}} \int_0^L \cos^2(\mu_{1i} x) dx = -K_{12} \mu_{2i}^2 \bar{\theta}_{2i} \end{aligned}$$

De modo análogo a terceira integral resulta em:

$$\frac{K_{13}}{N_{1i}^{1/2}} \int_0^L \Psi_{1i} \frac{\partial^2 \theta_{3H}}{\partial x^2} dx = -K_{13} \mu_{3i}^2 \bar{\theta}_{3i}$$

Com isso demonstra-se a equação (3.44.a).

As equações (3.44.b,c) podem ser demonstradas de modo análogo à equação (3.44.a).

A partir das equações (3.40.a,b,c), obtemos:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_{1i}(0) &= (-1)^i \frac{2\sqrt{2L}}{\pi(1-2i)} F_1 \\ \bar{\theta}_{2i}(0) &= (-1)^i \frac{2\sqrt{2L}}{\pi(1-2i)} F_2 \\ \bar{\theta}_{3i}(0) &= (-1)^i \frac{2\sqrt{2L}}{\pi(1-2i)} F_3 \end{aligned} \tag{3.45.a,b,c}$$

- Prova das Equações (3.45.a,b,c):

Das equações (3.40.a), (3.29.a) e (3.35.a,b), resulta:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_{1i}(0) &= \frac{1}{N_{1i}^{1/2}} \int_0^L \Psi_{1i} \theta_{1h}(x,0) dx = \frac{F_1}{N_{1i}^{1/2}} \int_0^L \cos(\mu_{1i}) \theta_{1h}(x,0) dx = F_1 \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{1}{\mu_{1i}} \text{sen}(\mu_{1i} x) \Big|_0^L = \\ &= F_1 \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{L}{\pi(i-\frac{1}{2})} \text{sen} \pi \left(i - \frac{1}{2}\right) = -F_1 \sqrt{2L} \frac{2}{\pi(1-2i)} (-1)^{i-1} = (-1)^i \frac{2\sqrt{2L}}{\pi(1-2i)} F_1 \end{aligned}$$

Isto mostra a equação (3.45.a).

As equações (3.45.b,c) são demonstradas de modo análogo.

As equações (3.44.a,b,c) e (3.45.a,b,c) formam um sistema de E.D.O.s acopladas. A partir deste, é possível calcular o valor das transformadas. Usando as fórmulas de inversão (3.41.a,b,c), calculam-se os valores dos potenciais homogêneos. Num passo seguinte é possível compor a solução geral do problema de Luikov, expresso pelos potenciais de temperatura, umidade e pressão, para isto se substituindo os valores dos potenciais homogêneos, equações (3.41.a,b,c), e as soluções do problema particular, equações (3.26.a,b,c), nas equações (3.27.a,b,c).

Para proceder a implementação algorítmica, optou-se pela utilização das linguagens de programação *Fortran* e *Mathematica*, as quais possuem bibliotecas científicas de funções próprias para solução do problema de valor inicial, definido pelas equações (3.44.a,b,c e 3.45.a,b,c).

No capítulo seguinte apresenta-se uma análise e discussão crítica dos algoritmos implementados, mostrando-se o comportamento da convergência numérica das séries de expansão de autofunções, as quais expressam os potenciais desejados. As propriedades termofísicas dos materiais *epoxy* e *silicon gel* [07,09] foram selecionadas como valores numéricos de entrada dos algoritmos. Estes materiais são largamente empregados como proteção capsular de processadores e outros *chips* da indústria eletrônica.

## CAPÍTULO 4

### RESULTADOS E COMENTÁRIOS

A solução por transformada integral obtida no item 3.3 foi implementada utilizando-se as linguagens de programação *Fortran* e *Mathematica*<sup>®</sup>, neste último via um *notebook*, quando foram utilizados recursos de computação simbólica, como programação funcional, programação baseada em regras e visualização gráfica.

Para tanto, foi utilizado um microcomputador Pentium II de 300 MHz e 128 MB de memória RAM. Para análise do comportamento da taxa de convergência numérica, as séries de expansão de autofunções foram truncadas para vários valores de N, M e P, conseguindo-se 5 dígitos significativos convergidos, o que caracteriza uma excelente taxa de convergência numérica. Detalhes e exemplos na forma de gráficos e tabelas que expressam os perfis de distribuição de temperatura, umidade e pressão no interior do meio capilar poroso são mostrados a seguir.

#### 4.1 Resultados para *Epoxy*

Atribuíram-se os seguintes valores de propriedades termofísicas para o *epoxy* [07]:  $\rho_0 = 1170,0 \text{ Kg.m}^{-3}$ ,  $c_q = 1.400,0 \text{ J.Kg}^{-1}.\text{°K}^{-1}$ ,  $c_m = 0,03 \text{ Kg.Kg}^{-1}.\text{°M}^{-1}$ ,  $c_p = 0,05 \text{ Kg.Kg}^{-1}.\text{Pa}$ ,  $\varepsilon = 0,3$ ,  $\lambda = 2,3.10^6 \text{ J.Kg}^{-1}$ ,  $\Delta = 0,67 \text{ °M. °K}^{-1}$ ,  $K_q = 576,0 \text{ J.h}^{-1}.\text{m}^{-1}.\text{°K}^{-1}$ ,  $K_m = 3,0.10^{-6} \text{ Kg.h}^{-1}.\text{m}^{-1}.\text{°M}^{-1}$ ,  $K_p = 1,5.10^{-6} \text{ Kg.h}^{-1}.\text{m}^{-1}.\text{Pa}^{-1}$ . O comprimento característico escolhido é  $L = 0,01 \text{ m}$ . Os valores adotados para as condições iniciais são  $T_0 = 30,0 \text{ °C}$ ,  $U_0 = 13,5 \text{ °M}$  e  $P_0 = 0,00 \text{ Pa}$ . As condições de contorno assumem os seguintes valores em  $x = 0,00 \text{ m}$ :  $\partial T(x,t) / \partial t = 0,00$ ,  $\partial U(x,t) / \partial t = 0,00$ ,  $\partial P(x,t) / \partial t = 0,00$  e em  $x = 0,01 \text{ m}$ :  $T(x,t) = 80,0 \text{ °C}$ ,  $U(x,t) = 28,5 \text{ °M}$  e  $P(x,t) = 100 \text{ Pa}$ .

Para visualização do comportamento do processo de secagem, as curvas de distribuição de temperatura, T, umidade, U, e pressão, P, são obtidas a partir de valores convergidos dos potenciais e representadas, respectivamente, pelas Figs. (4.1.1) a (4.1.6), mostradas a seguir. Conforme esperado, o *epoxy* possui uma baixa inércia térmica, atingindo, após 0,30 h e nas camadas mais internas, temperaturas próximas ao valor de equilíbrio, o que pode ser observado na Fig. (4.1.1). Na Fig. (4.1.3), conforme esperado, são necessárias cerca de 4000 h para o meio poroso atingir valores de teor de umidade próximos à umidade de equilíbrio, o que caracteriza uma alta inércia mássica. Ainda na Fig. (4.1.3), devido ao intenso efeito termogradoiente [05,06,11] ocorrido no início do processo de secagem (o que pode ser inferido da Fig. (4.1.1), para  $t < 0,02 \text{ h}$ ), se pode observar quando  $t = 80 \text{ h}$  e próximo à superfície a penetração de uma frente de umidade, que se desloca das camadas mais próximas à superfície para as mais internas. Este efeito prossegue, transferindo parte da umidade para as camadas mais internas, o que pode ser observado na mesma figura, para

tempos mais longos. Posteriormente, prevalece o efeito da secagem, quando esta ocorre em todo o domínio do meio poroso e se aproxima do valor de equilíbrio ( $t > 4000$  h). A Fig. (4.1.5) exhibe o efeito da pressão, que provoca uma componente de transferência de massa por filtração, adicional à transferência de massa por difusão. O efeito da pressão negativa nas camadas mais internas (na figura, quando  $t = 400$  h), também é citado em [07]. Observa-se no efeito filtração que a pressão no meio poroso possui alta inércia pneumática, atingindo valores próximos ao equilíbrio (para  $t > 4000$  h).

$$T(x,t) (^{\circ}C)$$

t=0, 08 h

$X(m)\downarrow N_xM_xP\rightarrow$	5x5x5	10x10x10	15x15x15	20x20x20	25x25x25
0,000	48.41948	48.39764	48.40861	48.40163	48.40618
0,002	49.93302	49.94053	49.94331	49.94477	49.94570
0,004	54.45575	54.42988	54.44352	54.43497	54.44065
0,006	61.43849	61.45121	61.45579	61.45821	61.45978
0,008	70.39301	70.33080	70.36531	70.34341	70.35806
0,010	80.00001	80.00001	80.00001	80.00001	80.00001

t=0, 16 h

$X(m)\downarrow N_xM_xP\rightarrow$	5x5x5	10x10x10	15x15x15	20x20x20	25x25x25
0,000	64.36787	64.34739	64.35728	64.35174	64.35481
0,002	65.11606	65.12418	65.12718	65.12875	65.12971
0,004	67.40338	67.37833	67.39051	67.38370	67.38750
0,006	70.87558	70.88819	70.89297	70.89553	70.89708
0,008	75.36577	75.30560	75.33630	75.31897	75.32866
0,010	80.00000	80.00000	80.00000	80.00000	80.00000

t=0, 40 h

$X(m)\downarrow N_xM_xP\rightarrow$	5x5x5	10x10x10	15x15x15	20x20x20	25x25x25
0,000	78.28109	78.26278	78.26986	78.26724	78.26787
0,002	78.34988	78.35866	78.36186	78.36334	78.36398
0,004	78.65919	78.63672	78.64543	78.64221	78.64297
0,006	79.05546	79.06898	79.07410	79.07646	79.07747
0,008	79.66301	79.60966	79.63107	79.62325	79.62492
0,010	80.00000	80.00000	80.00000	80.00000	80.00000

Tabela 4.1.1 Convergência numérica e resultados obtidos usando o *Fortran* para as distribuições de temperatura no *epoxy*, adotando-se Tol=10<sup>-5</sup>.

$$U(x,t) (^{\circ}\text{M})$$

t=200 h

$X(\text{m}) \downarrow N \times M \times P \rightarrow$	5x5x5	10x10x10	15x15x15	20x20x20	25x25x25
0,000	26.35214	26.35210	26.35214	26.35214	26.35207
0,002	29.33821	29.33809	29.33808	29.33802	29.33805
0,004	36.34476	36.34475	36.34475	36.34473	36.34477
0,006	41.70301	41.70326	41.70333	41.70347	41.70332
0,008	39.13145	39.13149	39.13150	39.13153	39.13148
0,010	28.49999	28.49999	28.49999	28.49999	28.49999

t=1600 h

$X(\text{m}) \downarrow N \times M \times P \rightarrow$	5x5x5	10x10x10	15x15x15	20x20x20	25x25x25
0,000	60.24081	60.24073	60.24084	60.24076	60.24189
0,002	58.68774	58.68769	58.68777	58.68772	58.68867
0,004	54.18021	54.18019	54.18022	54.18023	54.18077
0,006	47.15865	47.15866	47.15863	47.15870	47.15885
0,008	38.30980	38.30982	38.30978	38.30985	38.30983
0,010	28.49999	28.49999	28.49999	28.49999	28.49999

t=4000 h

$X(\text{m}) \downarrow N \times M \times P \rightarrow$	5x5x5	10x10x10	15x15x15	20x20x20	25x25x25
0,000	35.55658	35.55642	35.55645	35.55650	35.55623
0,002	35.21120	35.21106	35.21109	35.21113	35.21088
0,004	34.20889	34.20877	34.20878	34.20883	34.20861
0,006	32.64775	32.64767	32.64766	32.64771	32.64755
0,008	30.68060	30.68056	30.68055	30.68058	30.68050
0,010	28.50000	28.50000	28.50000	28.50000	28.50000

Tabela 4.1.2 Convergência numérica e resultados obtidos usando o *Fortran* para as distribuições de umidade no *epoxy*, adotando-se  $Tol=10^{-5}$ .

**$P(x,t)$  (KPa)**

t=200 h

$X(m) \downarrow N_x M_x P \rightarrow$	5x5x5	10x10x10	15x15x15	20x20x20	25x25x25
0,000	-2.89755	-2.89751	-2.89759	-2.89760	-2.89745
0,002	-2.33967	-2.33959	-2.33964	-2.33962	-2.33953
0,004	2.07790	2.07784	2.07778	2.07773	2.07783
0,006	17.72557	17.72539	17.72532	17.72518	17.72539
0,008	51.38997	51.39017	51.39021	51.39030	51.39024
0,010	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000

t=1600 h

$X(m) \downarrow N_x M_x P \rightarrow$	5x5x5	10x10x10	15x15x15	20x20x20	25x25x25
0,000	50.13243	50.13249	50.13235	50.13243	50.13190
0,002	52.57258	52.57262	52.57252	52.57256	52.57219
0,004	59.65461	59.65460	59.65460	59.65453	59.65456
0,006	70.68627	70.68622	70.68630	70.68616	70.68649
0,008	84.58840	84.58836	84.58843	84.58832	84.58862
0,010	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000

t=4000 h

$X(m) \downarrow N_x M_x P \rightarrow$	5x5x5	10x10x10	15x15x15	20x20x20	25x25x25
0,000	91.07384	91.07388	91.07385	91.07384	91.07389
0,002	91.51073	91.51076	91.51073	91.51071	91.51077
0,004	92.77859	92.77861	92.77859	92.77859	92.77863
0,006	94.75334	94.75335	94.75335	94.75333	94.75336
0,008	97.24167	97.24167	97.24168	97.24167	97.24168
0,010	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000

Tabela 4.1.3 Convergência numérica e resultados obtidos usando o *Fortran* para as distribuições de pressão no *epoxy*, adotando-se Tol=10-5.

°C	Time(h)	0mm	2mm	4mm	6mm	8mm	10mm
	0.	30.	30.	30.	30.	30.	80.
	0.08	48.3981	49.9408	54.4298	61.4508	70.3305	80.
	0.16	64.3474	65.1242	67.3783	70.8882	75.3056	80.
	0.24	72.3145	72.7014	73.8241	75.5717	77.769	80.
	0.32	76.2845	76.4771	77.036	77.9057	78.9971	80.
	0.4	78.2627	78.3586	78.6367	79.0689	79.6096	80.
	0.48	79.2486	79.2962	79.4344	79.6489	79.9155	80.
	0.56	79.74	79.7636	79.8321	79.9381	80.0684	80.
	0.64	79.985	79.9967	80.0305	80.0825	80.1452	80.
	0.72	80.1072	80.1129	80.1295	80.1547	80.1839	80.
	0.8	80.1682	80.171	80.179	80.1909	80.2037	80.

Tabela 4.1.4 Distribuições de temperatura no *epoxy*, usando o *Mathematica*, para  $N=M=P=10$ .

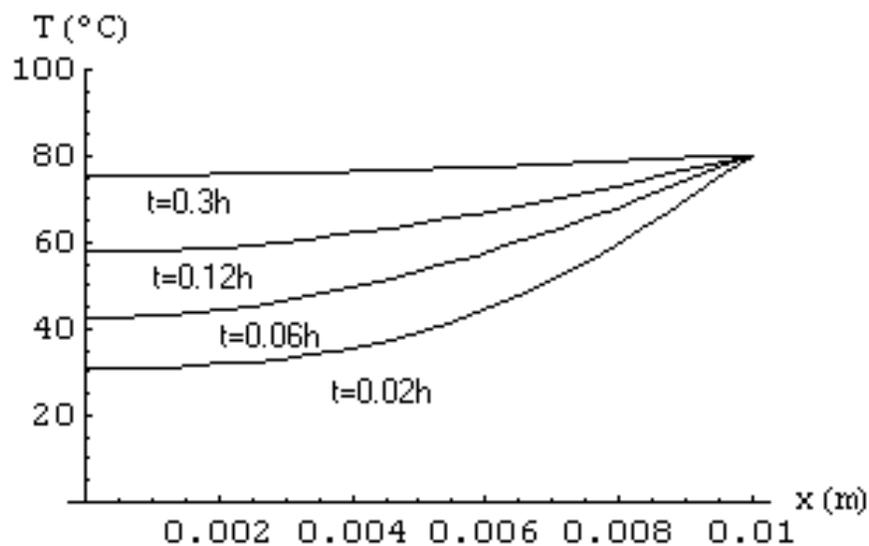


Figura 4.1.1. Distribuição dos perfis de temperatura,  $T$ , no *epoxy*, usando o *Mathematica*, para  $N=M=P=10$ .

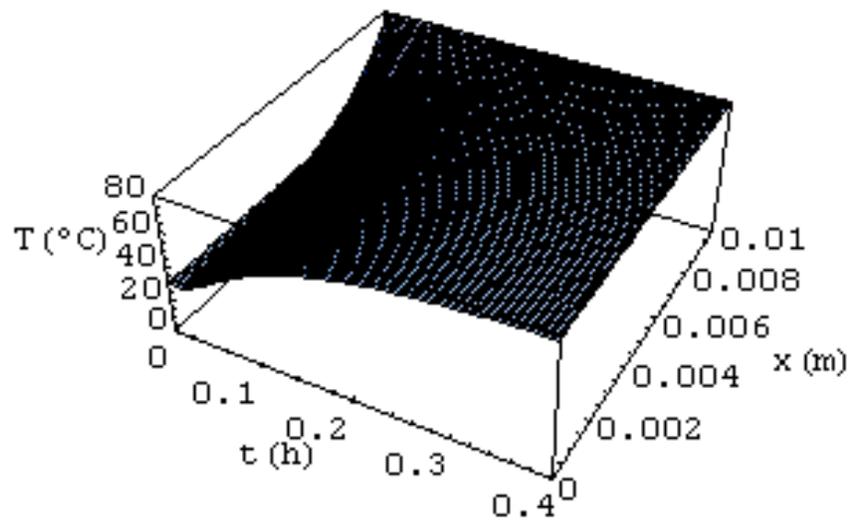


Figura 4.1.2. Distribuição da temperatura,  $T$ , no *epoxy*, usando o *Mathematica*, para  $N=M=P=10$ .

	Time(h)	0mm	2mm	4mm	6mm	8mm	10mm
°M	0.	13.5	13.5	13.5	13.5	13.5	28.5
	800.	63.6911	62.0509	57.2231	49.5329	39.6276	28.5
	1600.	60.241	58.6879	54.1802	47.1586	38.3097	28.5
	2400.	49.2811	48.264	45.3123	40.7148	34.9217	28.5
	3200.	40.8492	40.2448	38.4907	35.7587	32.3161	28.5
	4000.	35.5569	35.2115	34.2091	32.6479	30.6807	28.5
	4800.	32.463	32.2691	31.7062	30.8294	29.7246	28.5
	5600.	30.7077	30.5996	30.2861	29.7977	29.1822	28.5
	6400.	29.7252	29.6652	29.4912	29.2201	28.8786	28.5
	7200.	29.1787	29.1455	29.0491	28.8989	28.7097	28.5
	8000.	28.8756	28.8573	28.8039	28.7208	28.6161	28.5

Tabela 4.1.5 Distribuições de umidade no *epoxy*, usando o *Mathematica*, para  $N=M=P=10$ .

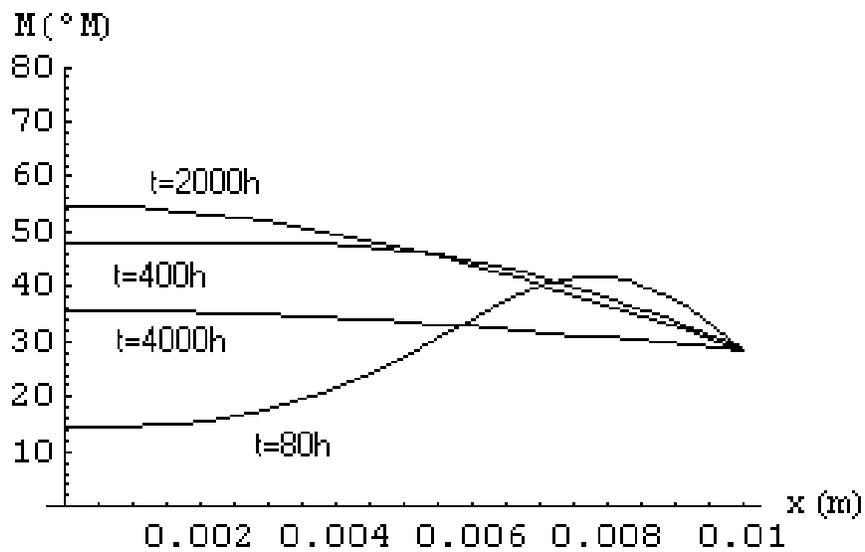


Figura 4.1.3. Distribuição dos perfis de umidade,  $M$ , no *epoxy*, usando o *Mathematica*, para  $N=M=P=10$ .

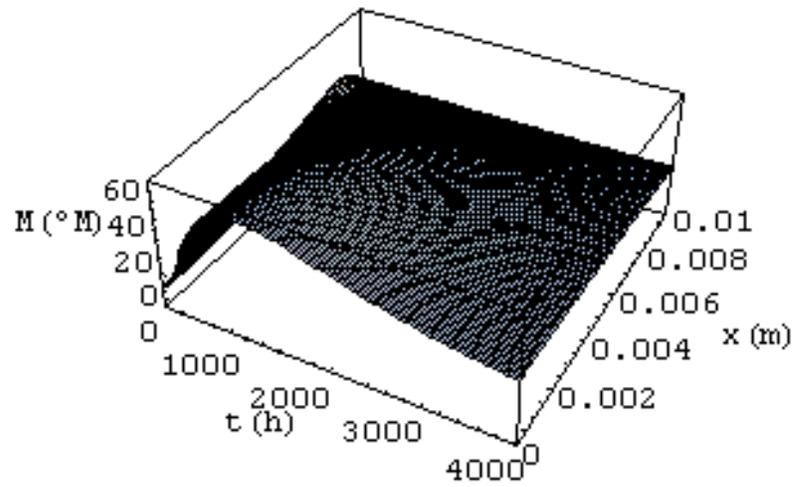


Figura 4.1.4. Distribuição da umidade,  $U$ , no *epoxy*, usando o *Mathematica*, para  $N=M=P=10$ .

Pa	Time(h)	0mm	2mm	4mm	6mm	8mm	10mm
	0.	0.	0.	0.	0.	0.	100.
	800.	16.5036	20.4884	32.1368	50.491	73.885	100.
	1600.	50.1323	52.5725	59.6546	70.6864	84.5885	100.
	2400.	71.4817	72.8774	76.9282	83.2373	91.1873	100.
	3200.	83.9792	84.7633	87.0389	90.5832	95.0493	100.
	4000.	91.0738	91.5107	92.7786	94.7533	97.2417	100.
	4800.	95.046	95.2884	95.9921	97.0881	98.4691	100.
	5600.	97.2556	97.3899	97.7797	98.3869	99.1519	100.
	6400.	98.481	98.5554	98.7711	99.1072	99.5306	100.
	7200.	99.1596	99.2007	99.3201	99.506	99.7403	100.
	8000.	99.5352	99.5579	99.6239	99.7268	99.8564	100.

Tabela 4.1.6 Distribuições de pressão no *epoxy*, usando o *Mathematica*, para  $N=M=P=10$ .

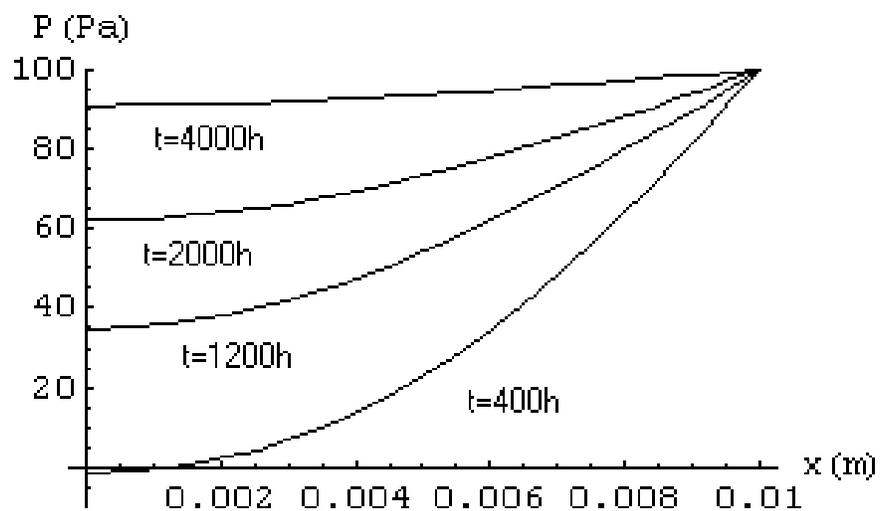


Figura 4.1.5. Distribuição dos perfis de pressão,  $P$ , no *epoxy*, usando o *Mathematica*, para  $N=M=P=10$ .

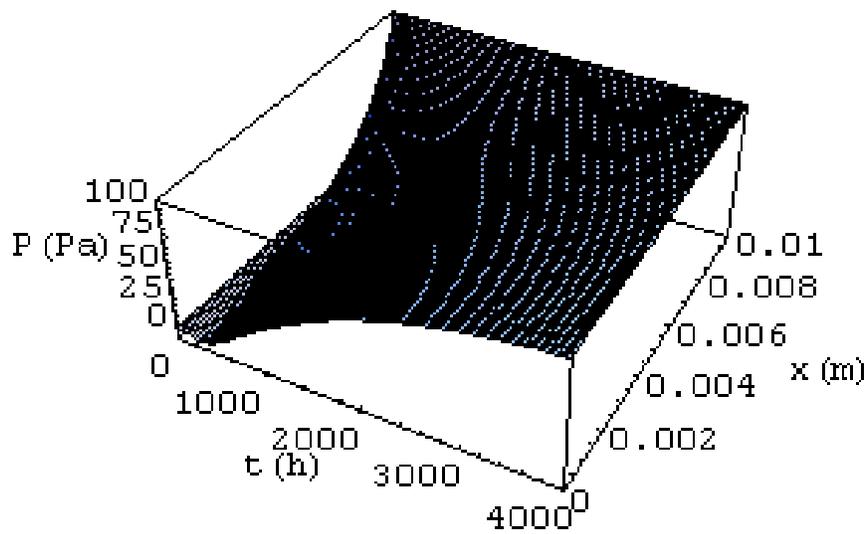


Figura 4.1.6. Distribuição da pressão,  $P$ , no *epoxy*, usando o *Mathematica*, para  $N=M=P=10$ .

## 4.2. Resultados para o *Silicon Gel*

Atribuíram-se os seguintes valores de propriedades termofísicas, para uma cápsula de *silicon gel* [07], utilizada na proteção de *chips* eletrônicos:  $\rho_0 = 550,0 \text{ Kg.m}^{-3}$ ,  $c_q = 246,0 \text{ J.Kg}^{-1}.\text{°K}^{-1}$ ,  $c_m = 0,03 \text{ Kg.Kg}^{-1}.\text{°M}^{-1}$ ,  $c_p = 0,05 \text{ Kg.Kg}^{-1}.\text{Pa}$ ,  $\varepsilon = 0,3$ ,  $\lambda = 2,3.10^6 \text{ J.Kg}^{-1}$ ,  $\Delta = 0,67 \text{ °M.°K}^{-1}$ ,  $K_q = 7055,0 \text{ J.h}^{-1}.\text{m}^{-1}.\text{°K}^{-1}$ ,  $K_m = 4,0.10^{-6} \text{ Kg.h}^{-1}.\text{m}^{-1}.\text{°M}^{-1}$ ,  $K_p = 2,0.10^{-6} \text{ Kg.h}^{-1}.\text{m}^{-1}.\text{Pa}^{-1}$ . O comprimento característico escolhido é  $L = 0,01 \text{ m}$ . Os valores adotados para as condições iniciais são  $T_0 = 30,0 \text{ °C}$ ,  $U_0 = 13,5 \text{ °M}$  e  $P_0 = 0,00 \text{ Pa}$ . As condições de contorno assumem os seguintes valores em  $x = 0,0 \text{ m}$ :  $\partial T(x,t) / \partial t = 0$ ,  $\partial U(x,t) / \partial t = 0$ ,  $\partial P(x,t) / \partial t = 0$  e em  $x = 0,01 \text{ m}$ :  $T(x,t) = 80,0 \text{ °C}$ ,  $U(x,t) = 28,5 \text{ °M}$  e  $P(x,t) = 100 \text{ Pa}$ .

Para visualização do comportamento do processo de secagem, as curvas de distribuição de temperatura,  $T$ , umidade,  $M$ , e pressão,  $P$ , são obtidas a partir de valores convergidos dos potenciais e representadas, respectivamente, pelas Figs. (4.2.1) a (4.2.6), mostradas a seguir. Conforme esperado, o *silicon gel* também possui uma baixa inércia térmica e da ordem de 2 magnitudes menor que a do *epoxy*, atingindo assim, após 0,003 h e nas camadas mais internas, temperaturas próximas ao valor de equilíbrio, o que pode ser observado na Fig. (4.2.1). Na Fig. (4.2.3), conforme esperado, são necessárias cerca de 16000 h para o meio poroso atingir valores de teor de umidade próximos à umidade de equilíbrio, o que caracteriza uma alta inércia mássica. Ainda na Fig. (4.2.3), devido ao intenso efeito termogradiante [05,06,11] ocorrido no início do processo de secagem (o que pode ser inferido da Fig. (4.2.1), para  $t < 0,0002 \text{ h}$ ), se pode observar quando  $t = 800 \text{ h}$  e próximo à superfície a penetração de uma frente de umidade, que se desloca das camadas mais próximas à superfície para as mais internas. Este efeito prossegue, transferindo parte da umidade para as camadas mais internas, o que pode ser observado na mesma figura, para tempos mais longos. Posteriormente, prevalece o efeito da secagem, quando esta ocorre em todo o domínio do meio poroso e se aproxima do valor de equilíbrio ( $t > 16000 \text{ h}$ ). A Fig. (4.2.5) exhibe o efeito da pressão, que provoca uma componente de transferência de massa por filtragem, adicional à transferência de massa por difusão. O efeito da pressão negativa nas camadas mais internas (na figura, quando  $t = 800 \text{ h}$ ), também é citado em [07]. Observa-se no efeito filtragem que a pressão no meio poroso possui alta inércia pneumática, atingindo valores próximos ao equilíbrio (para  $t > 16000 \text{ h}$ ).

$$T(x,t) (^{\circ}C)$$

t=0, 00040 h

$X(m)\downarrow N_xM_xP\rightarrow$	5x5x5	10x10x10	15x15x15	20x20x20	25x25x25
0,000	42.15583	42.15545	42.15554	42.15537	42.15540
0,002	43.93294	43.93293	43.93293	43.93291	43.93288
0,004	49.15338	49.15310	49.15329	49.15321	49.15329
0,006	57.43903	57.43927	57.43940	57.43949	57.43952
0,008	68.07705	68.07645	68.07696	68.07671	68.07695
0,010	80.00001	80.00001	80.00001	80.00001	80.00001

t=0, 00120 h

$X(m)\downarrow N_xM_xP\rightarrow$	5x5x5	10x10x10	15x15x15	20x20x20	25x25x25
0,000	66.40817	66.40794	66.40810	66.40798	66.40804
0,002	67.07321	67.07330	67.07337	67.07341	67.07341
0,004	69.00454	69.00426	69.00449	69.00450	69.00458
0,006	72.01162	72.01177	72.01189	72.01210	72.01210
0,008	75.80207	75.80138	75.80184	75.80169	75.80191
0,010	80.00000	80.00000	80.00000	80.00000	80.00000

t=0, 00240 h

$X(m)\downarrow N_xM_xP\rightarrow$	5x5x5	10x10x10	15x15x15	20x20x20	25x25x25
0,000	77.09987	77.09969	77.09983	77.09952	77.09956
0,002	77.24162	77.24175	77.24179	77.24160	77.24158
0,004	77.65430	77.65405	77.65422	77.65393	77.65400
0,006	78.29604	78.29620	78.29625	78.29615	78.29614
0,008	79.10598	79.10529	79.10571	79.10535	79.10557
0,010	80.00000	80.00000	80.00000	80.00000	80.00000

Tabela 4.2.1 Convergência numérica e resultados obtidos usando o *Fortran* para as distribuições de temperatura no *silicon gel*, adotando-se Tol=10-5.

$$U(x,t) (^{\circ}\text{M})$$

t=800 h

$X(m)\downarrow N_xM_xP\rightarrow$	5x5x5	10x10x10	15x15x15	20x20x20	25x25x25
0,000	31.64017	31.64017	31.64001	31.63995	31.63988
0,002	34.16570	34.16573	34.16558	34.16552	34.16545
0,004	39.71530	39.71534	39.71539	39.71542	39.71545
0,006	43.03721	43.03720	43.03745	43.03752	43.03769
0,008	39.14575	39.14575	39.14577	39.14578	39.14580
0,010	28.49999	28.49999	28.49999	28.49999	28.49999

t=4000 h

$X(m)\downarrow N_xM_xP\rightarrow$	5x5x5	10x10x10	15x15x15	20x20x20	25x25x25
0,000	65.73379	65.73364	65.73484	65.73486	65.73498
0,002	63.92024	63.92015	63.92098	63.92099	63.92108
0,004	58.64987	58.64990	58.64992	58.64990	58.64993
0,006	50.42279	50.42292	50.42229	50.42225	50.42224
0,008	40.03299	40.03311	40.03249	40.03246	40.03244
0,010	28.49999	28.49999	28.49999	28.49999	28.49999

t=16000 h

$X(m)\downarrow N_xM_xP\rightarrow$	5x5x5	10x10x10	15x15x15	20x20x20	25x25x25
0,000	33.07628	33.07628	33.07610	33.07610	33.07606
0,002	32.85230	32.85229	32.85213	32.85213	32.85209
0,004	32.20229	32.20225	32.20214	32.20214	32.20211
0,006	31.18987	31.18986	31.18976	31.18977	31.18974
0,008	29.91415	29.91415	29.91409	29.91409	29.91408
0,010	28.50000	28.50000	28.50000	28.50000	28.50000

Tabela 4.2.2 Convergência numérica e resultados obtidos usando o *Fortran* para as distribuições de umidade no *silicon gel*, adotando-se Tol=10-5.

**$P(x,t)$  (KPa)**

t=800 h

$X(m) \downarrow N_x M_x P \rightarrow$	5x5x5	10x10x10	15x15x15	20x20x20	25x25x25
0,000	-3.65733	-3.65740	-3.65732	-3.65724	-3.65724
0,002	-2.52638	-2.52647	-2.52640	-2.52632	-2.52633
0,004	3.44583	3.44575	3.44568	3.44568	3.44558
0,006	20.61932	20.61930	20.61917	20.61915	20.61902
0,008	53.96834	53.96831	53.96852	53.96861	53.96870
0,010	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000

t=4000 h

$X(m) \downarrow N_x M_x P \rightarrow$	5x5x5	10x10x10	15x15x15	20x20x20	25x25x25
0,000	32.08232	32.08249	32.08121	32.08124	32.08112
0,002	35.39496	35.39506	35.39426	35.39429	35.39421
0,004	45.01809	45.01801	45.01828	45.01834	45.01831
0,006	60.03030	60.03009	60.03117	60.03125	60.03127
0,008	78.97691	78.97672	78.97768	78.97773	78.97776
0,010	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000

t=16000 h

$X(m) \downarrow N_x M_x P \rightarrow$	5x5x5	10x10x10	15x15x15	20x20x20	25x25x25
0,000	93.99565	93.99564	93.99563	93.99562	93.99563
0,002	94.28953	94.28953	94.28951	94.28950	94.28950
0,004	95.14238	95.14240	95.14236	95.14236	95.14236
0,006	96.47073	96.47073	96.47072	96.47071	96.47072
0,008	98.14455	98.14455	98.14455	98.14455	98.14455
0,010	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000

Tabela 4.2.3 Convergência numérica e resultados obtidos usando o *Fortran* para as distribuições de pressão no *silicon gel*, adotando-se Tol=10<sup>-5</sup>.

	Time(h)	0mm	2mm	4mm	6mm	8mm	10mm
°C	0.	30.	30.	30.	30.	30.	80.
	0.0008	57.2599	58.3722	61.601	66.6315	72.9722	80.
	0.0016	71.8769	72.2745	73.4287	75.2263	77.4913	80.
	0.0024	77.0995	77.2416	77.6539	78.2961	79.1052	80.
	0.0032	78.9654	79.0161	79.1634	79.3928	79.6818	80.
	0.004	79.6319	79.6501	79.7027	79.7846	79.8878	80.
	0.0048	79.8701	79.8766	79.8953	79.9246	79.9614	80.
	0.0056	79.9552	79.9575	79.9642	79.9746	79.9877	80.
	0.0064	79.9856	79.9864	79.9888	79.9925	79.9971	80.
	0.0072	79.9964	79.9967	79.9976	79.9989	80.0004	80.
	0.008	80.0003	80.0004	80.0007	80.0011	80.0016	80.

Tabela 4.2.4 Distribuições de temperatura no *silicon gel*, usando o *Mathematica*, para  $N=M=P=10$ .

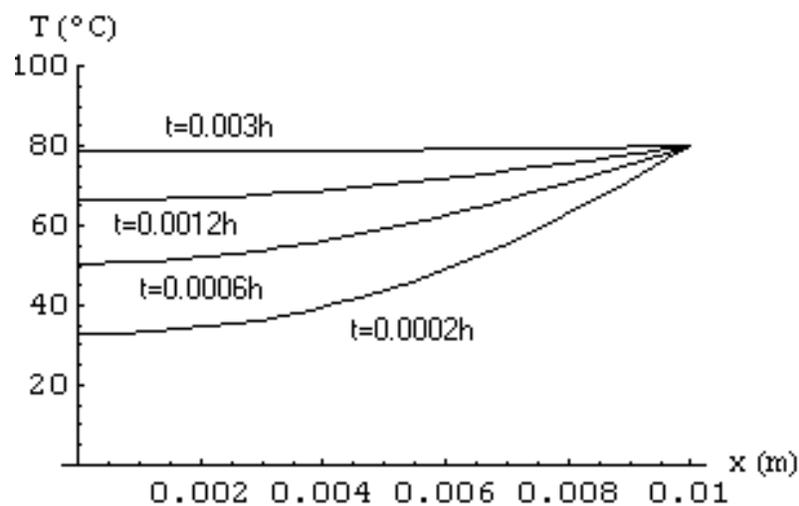


Figura 4.2.1. Distribuição dos perfis de temperatura,  $T$ , no *silicon gel*, usando o *Mathematica*, para  $N=M=P=10$ .

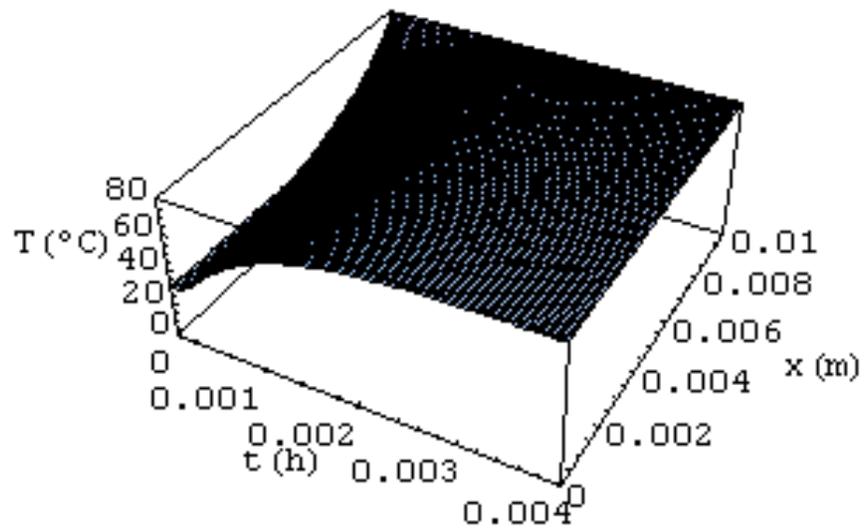


Figura 4.2.2. Distribuição da temperatura,  $T$ , no *silicon gel*, usando o *Mathematica*, para  $N=M=P=10$ .

	Time(h)	0mm	2mm	4mm	6mm	8mm	10mm
°M	0.	13.5	13.5	13.5	13.5	13.5	28.5
	8000.	50.5057	49.4287	46.303	41.4347	35.3002	28.5
	16000.	33.0764	32.8525	32.2024	31.19	29.9142	28.5
	24000.	29.372	29.3294	29.2055	29.0126	28.7695	28.5
	32000.	28.665	28.6569	28.6335	28.597	28.551	28.5
	40000.	28.5312	28.5297	28.5252	28.5183	28.5096	28.5
	48000.	28.5059	28.5056	28.5048	28.5035	28.5018	28.5
	56000.	28.5011	28.5011	28.5009	28.5007	28.5003	28.5
	64000.	28.5002	28.5002	28.5002	28.5001	28.5001	28.5
	72000.	28.5	28.5	28.5	28.5	28.5	28.5
	80000.	28.5	28.5	28.5	28.5	28.5	28.5

Tabela 4.2.5 Distribuições de umidade no *silicon gel*, usando o *Mathematica*, para  $N=M=P=10$ .

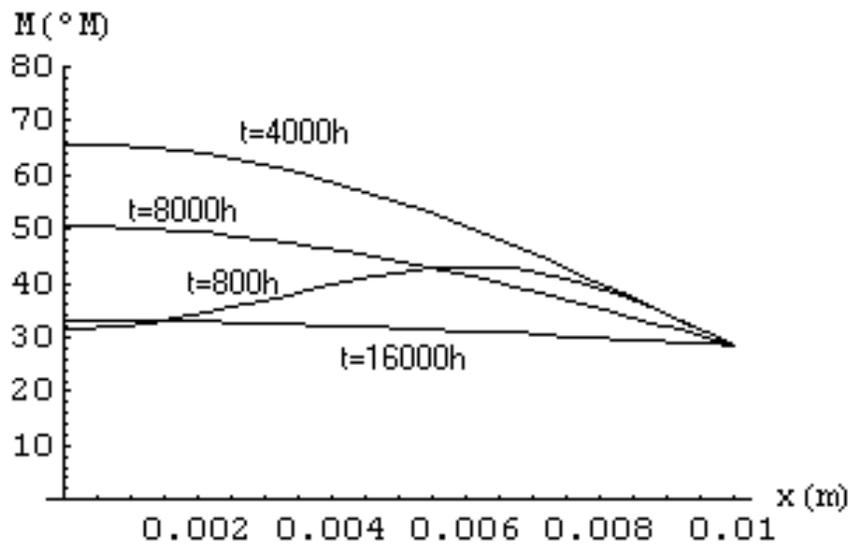


Figura 4.2.3. Distribuição dos perfis de umidade,  $M$ , no *silicon gel*, usando o *Mathematica*, para  $N=M=P=10$ .

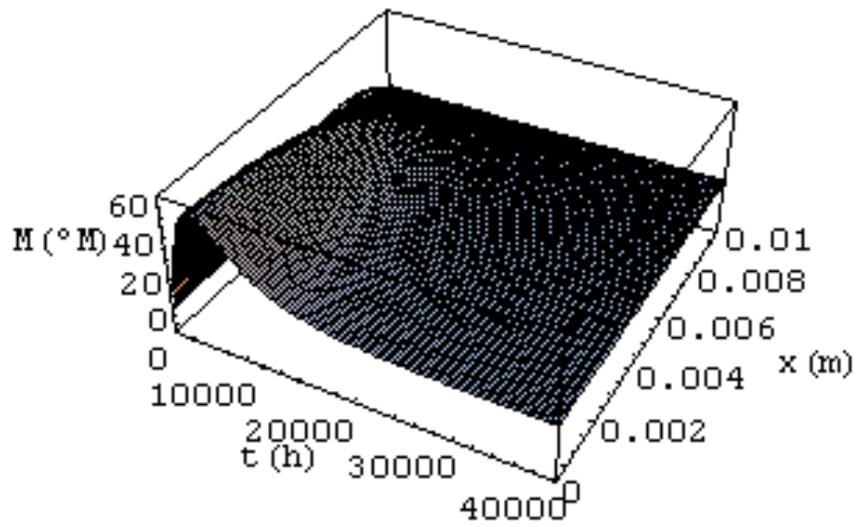


Figura 4.2.4. Distribuição da umidade,  $U$ , no *silicon gel*, usando o *Mathematica*, para  $N=M=P=10$ .

Pa	Time(h)	0mm	2mm	4mm	6mm	8mm	10mm
	0.	0.	0.	0.	0.	0.	100.
	8000.	68.8505	70.375	74.7995	81.6907	90.3743	100.
	16000.	93.9956	94.2895	95.1424	96.4707	98.1446	100.
	24000.	98.8629	98.9185	99.08	99.3316	99.6486	100.
	32000.	99.785	99.7955	99.826	99.8736	99.9335	100.
	40000.	99.9593	99.9613	99.9671	99.9761	99.9874	100.
	48000.	99.9923	99.9927	99.9938	99.9955	99.9976	100.
	56000.	99.9985	99.9986	99.9988	99.9991	99.9995	100.
	64000.	99.9997	99.9997	99.9998	99.9998	99.9999	100.
	72000.	99.9999	99.9999	100.	100.	100.	100.
	80000.	100.	100.	100.	100.	100.	100.

Tabela 4.2.6 Distribuições de pressão no *silicon gel*, usando o *Mathematica*, para  $N=M=P=10$ .

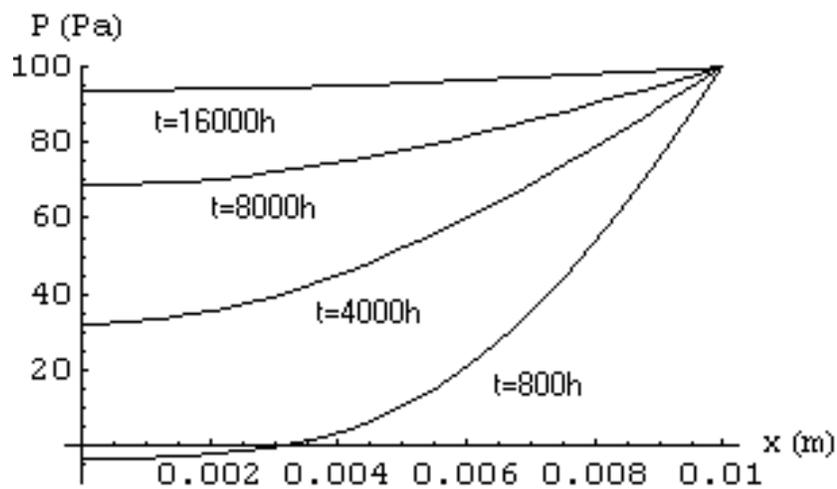


Figura 4.2.5. Distribuição dos perfis de pressão,  $P$ , no *silicon gel*, usando o *Mathematica*, para  $N=M=P=10$ .

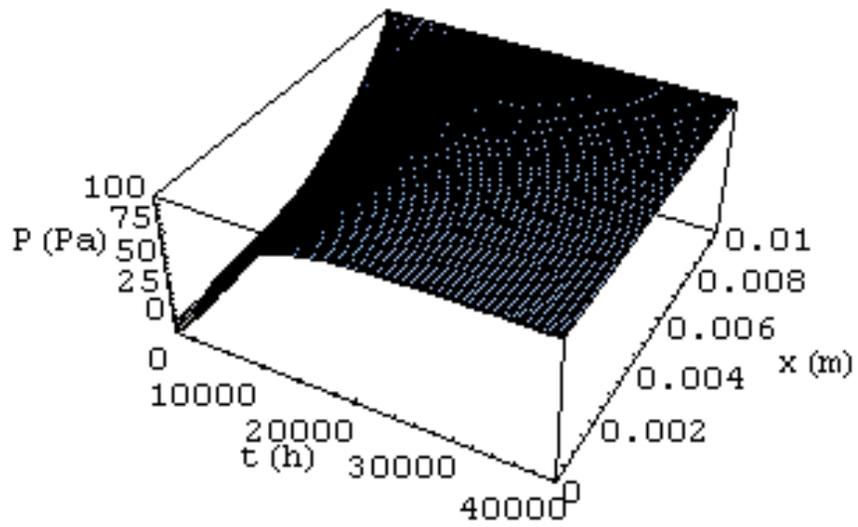


Figura 4.2.6. Distribuição da pressão,  $P$ , no *silicon gel*, usando o *Mathematica*, para  $N=M=P=10$ .

O estudo realizado mostra claramente através das tabelas e gráficos apresentados o comportamento do fenômeno de transferência simultânea de calor e massa com efeito da pressão, o que é visualizado através do comportamento dinâmico dos perfis de distribuição de calor, massa e pressão no meio capilar poroso. Esta metodologia pode ser estendida a classe de problemas mais complexos, tornando assim mais atrativo o desenvolvimento da modelagem avançada. No capítulo seguinte são apresentadas conclusões e sugestões para continuidade desta linha de pesquisa.

## CAPÍTULO 5

### CONCLUSÕES E SUGESTÕES

O uso combinado do método de transformada integral generalizada e da computação simbólica permitiu a implementação de um algoritmo que disponibiliza a manipulação analítica e sistemática dos formalismos da GITT, segundo o problema de Luikov abordado.

O fato de se utilizar a programação simbólica permitiu implementar um algoritmo que interpreta complexas regras e formulações matemáticas pertinentes aos formalismos da técnica de transformada integral, repassando assim para o computador a tarefa humana de desenvolvimento de cálculos analíticos. A manipulação dos formalismos analíticos precisou ser realizada manualmente pelo programador para poder construir e implementar o algoritmo do problema utilizando a linguagem de programação *Fortran*. Este fato abre uma porta para a arte da programação avançada ao se pensar em problemas mais complexos.

O uso do *Fortran* teve a finalidade de comparar os recursos das duas linguagens de programação.

Os gráficos apresentados permitem aos engenheiros de projeto quantitativamente analisarem o comportamento transiente do *epoxy* e do *silicon gel*, que exibem, este último em maior ordem de magnitude, baixa inércia térmica e alta inércia mássica, o que é desejável em camadas protetoras de *chips* eletrônicos.

Como continuidade da linha de pesquisa, propõe-se a solução das variantes 2D e 3D do problema enfocado, o que se tornará ainda mais atrativo quando comparado a dificuldades de implementação advindas do uso de métodos puramente numéricos, já que na metodologia utilizada, os potenciais desejados sempre são expressos por séries de expansões de autofunções.

A utilização de GITT associada à computação simbólica abre uma nova fronteira para a arte de programar. Agora é possível transferir inúmeras formulações analíticas diretamente do algoritmo para o código computacional, o que ainda não é possível quando se utilizam os métodos puramente numéricos. A qualidade dos resultados obtidos pelo uso da técnica de transformada integral, como a redução do esforço computacional com a aplicação do método adaptativo e a sistematização do processo de cálculo atesta a viabilidade de se estender a técnica a outras classes de problemas de interesse das engenharias e ciências físicas.

Os resultados apresentados ficam à disposição para posterior comparação com resultados obtidos experimentalmente ou por outros métodos de solução.

Com o advento da versão 3.01 do *Mathematica*®, surgiu uma nova geração de programas para solução de variantes do problema de Luikov e outras classes de equações através da GITT, que usufrui de inúmeros recursos melhorados e integrados, citando-se: controle adaptativo de precisão, compilação on-line de operações funcionais, procedurais e orientadas a listas, algoritmos numéricos otimizados e recursos de animação gráfica.

Outra importante área a ser pesquisada é a hibridização de métodos puramente numéricos com a GITT, o que será melhor viabilizado com o uso de computação simbólica.

O uso de mecanismos combinados associando transformada integral e computação simbólica trará novos atrativos para solução de problemas bi e tridimensionais, o que já é notado por se evitar geração de malhas (economia de memória) e por se acelerar a taxa de convergência numérica (redução do tempo de CPU).

Também para a análise e desenvolvimento teórico das teorias contemporâneas de classe de equações diferenciais parciais, a metodologia desenvolvida neste trabalho mostra-se bastante viável.

## APÊNDICE I

### **NOTEBOOK DO MATHEMATICA 3.01 COM IMPLEMENTAÇÃO**

Apresentamos um *Notebook* do *Mathematica*® que mostra a solução por transformada integral para variante do problema de Luikov, usando as propriedades da *Silicon Gel*.

Equações Governantes:

$$C_q \frac{\partial \Theta_1}{\partial t} = K_{11} \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial x^2} + K_{12} \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial x^2} + K_{13} \frac{\partial^2 \Theta_3}{\partial x^2}$$

$$C_m \frac{\partial \Theta_2}{\partial t} = K_{21} \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial x^2} + K_{22} \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial x^2} + K_{23} \frac{\partial^2 \Theta_3}{\partial x^2} \quad \text{for } t > 0, \quad 0 < x < L$$

$$C_p \frac{\partial \Theta_3}{\partial t} = K_{31} \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial x^2} + K_{32} \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial x^2} + K_{33} \frac{\partial^2 \Theta_3}{\partial x^2}$$

Condições Iniciais:

$$\Theta_1(x, 0) = T_0$$

$$\Theta_2(x, 0) = M_0$$

$$\Theta_3(x, 0) = P_0$$

Condições de Contorno:

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \Theta_2}{\partial x} = 0 \quad \text{for } x = 0$$

$$\frac{\partial \Theta_3}{\partial x} = 0$$

$$\Theta_1(x, t) = T_B$$

$$\Theta_2(x, t) = M_B \quad \text{for } x = L$$

$$\Theta_3(x, t) = P_B$$

Onde,

$\Theta_1 \equiv U(x, t) \rightarrow$  Potencial de Temperature

$\Theta_2 \equiv T(x, t) \rightarrow$  Potencial de Umidade

$\Theta_3 \equiv P(x, t) \rightarrow$  Potencial de Pressão

$$\begin{pmatrix} C_q \\ C_m \\ C_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_q \rho_0 \delta' \\ \varepsilon \lambda \rho_0 c_m \\ -\frac{\lambda \rho_0 k_p c_p}{k_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (k_q + \varepsilon \lambda k_m) \delta' & \varepsilon \lambda \delta' k_m & \varepsilon \lambda \delta' k_p \\ \varepsilon \lambda \delta' k_m & \varepsilon \lambda k_m & \varepsilon \lambda k_p \\ \varepsilon \lambda \delta' k_p & \varepsilon \lambda k_p & \frac{\lambda k_p^2 (\varepsilon - 1)}{k_m} \end{pmatrix} \quad \delta = \frac{\delta'}{c_m}$$

$\rho_0$  = Densidade  
 $C_q$  = Heat capacity  
 $C_m$  = Moisture capacity  
 $C_p$  = Pressure capacity  
 $\epsilon$  = Ratio of the vapour diffusion coefficient to the coefficient of the total diffusion of moisture  
 $\lambda$  = Latent heat of vaporization  
 $\delta$  = Thermogradient coefficient  
 $k_q$  = Coefficient of thermal conductivity  
 $k_m$  = Coefficient of mass conductivity  
 $k_p$  = Coefficient of pressure conductivity

para nosso propósito prático assumimos que:

$T_0 = 30.0^\circ\text{C}$        $T_B = 80.0^\circ\text{C}$   
 $M_0 = 13.5^\circ\text{M}$        $M_B = 28.5^\circ\text{M}$   
 $P_0 = 0.0\text{Pa}$        $P_B = 100\text{Pa}$

Propriedades do *Silicon Gel*:

$\rho_0 = 550.0;$   
 $c_q = 246.0;$   
 $c_m = 0.03;$   
 $c_p = 0.05;$   
 $\epsilon = 0.3;$   
 $\lambda = 2.310^6;$   
 $\Delta = 0.67;$   
 $K_q = 7055.0;$   
 $K_m = \frac{4.0}{10^7};$   
 $K_p = \frac{2.0}{10^7};$   
 $\delta = \frac{\Delta}{c_m};$

Termos calculados:

$C_1 = c_q \rho_0 \delta;$   
 $C_2 = \epsilon \lambda \rho_0 c_m;$   
 $C_3 = -\lambda \rho_0 c_p \frac{K_p}{K_m};$   
 $K_{1,1} = (K_q + \epsilon \lambda K_m) \delta;$   
 $K_{1,2} = \epsilon \lambda \delta K_m;$   
 $K_{1,3} = \epsilon \lambda K_p \delta;$   
 $K_{2,1} = \epsilon \lambda \delta K_m;$   
 $K_{2,2} = \epsilon \lambda K_m;$   
 $K_{2,3} = \epsilon \lambda K_p;$   
 $K_{3,1} = \epsilon \lambda K_p \delta;$   
 $K_{3,2} = \epsilon \lambda K_p;$   
 $K_{3,3} = \frac{\lambda K_p^2 (\epsilon - 1)}{K_m};$

`Table[Ki,j, {i, 1, 3}, {j, 1, 3}] // MatrixForm`

Tamanho do Corpo:

$$L = .01;$$

Condições no Contorno  $x=L$ :

$$\theta_1[L, t_] = 80.;$$

$$\theta_2[L, t_] = 28.5;$$

$$\theta_3[L, t_] = 100.;$$

Condições Iniciais:

$$\theta_1[x_, 0.] = 30.;$$

$$\theta_2[x_, 0.] = 13.5;$$

$$\theta_3[x_, 0.] = 0.;$$

Termos obtidos do sistema homogêneo:

$$F_i = \theta_i[x, 0.] - \theta_i[L, t];$$

Autovalores:

$$\mu_{i,j} = \frac{\left(j - \frac{1}{2}\right) \pi}{L};$$

Autofunções:

$$\Psi_{i,j}[x_] = \text{Cos}[\mu_{i,j} x];$$

Ordem de truncamento:

$$M_1 = 10;$$

$$M_2 = 10;$$

$$M_3 = 10;$$

Termos da inversa a serem calculados:

$$Fs = N[\text{Flatten}[\{\text{Table}[\theta_{i,j}, \{i, 1, 3\}, \{j, 1, M_i\}]\}]]$$

Sistema de EDO's truncado:

Potenciais como series de autofunções:

Tabelas de valores para cada potencial:

Gráficos das distribuições de cada potencial:

## APÊNDICE II

### IMPLEMENTAÇÃO NO *FORTRAN*

Apresentamos o algoritmo em *Fortran* que mostra a solução por transformada integral para variante do problema de Luikov, usando as propriedades do *Silicon Gel*.







## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [01] COTTA, R.M. and MIKHAILOV, M.D., “Heat Conduction (Lumped Analysis, Integral Transforms and Symbolic Computation)”, John Wiley & Sons, Strasburg, France. To Appear, 1997.
- [02] ÖZISIK, M.N. and MURRAY, R.L., “On the Solution of Linear Diffusion Problems with Variable Boundary Conditions”, J. Heat Transfer, v.96, pp.48-51, 1974.
- [03] MIKHAILOV, M.D. and ÖZISIK, M.N., “Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion”, John Wiley, New York, 1984.
- [04] COTTA, R.M., “Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow”, CRC Press, Boca Raton, 1993.
- [05] LUIKOV, A.V., “Heat and Mass Transfer in Capillary-Porous Bodies”, Pergamon Press, Oxford, 1966.
- [06] LUIKOV, A.V., “Systems of Differential Equations of Heat and Mass Transfer in Capillary Porous Bodies (Review)”, Int. J. Heat & Mass Transfer, v.18, pp.1-14, 1975.
- [07] LEWIS R.W. and FERGUSON W. J., “The Effect of Temperature and Total Gas Pressure on the Moisture Content in a Capillary Porous Body”, Int. J. Num. Meth in Engineering. V. 29. pp. 357-369, 1990.
- [08] LEWIS, R.W., MORGAN, K., THOMAS, H. R. and SEETHARAMU, K. N. “The Finite Element Method in Heat Transfer Analysis”, John Wiley & Sons, 1996.
- [09] CUNHA, F.G.M., RIBEIRO, J.W., DUARTE, J.B.F., SANTOS, C.A.C. e MARCONDES, F., “Efeito da pressão no problema de Luikov”, CONEM 2002, 2002 (trabalho aprovado em versão final).
- [10] ANDRADE, F. E. “Solução de Equações Diferenciais Parabólicas Acopladas pela Técnica de Transformada Integral e Computação Simbólica”, Dissertação de Mestrado, DC-UFC, Dez/1996.
- [11] RIBEIRO, J.W. and COTTA, R.M., “On the Solution of Non-Linear Drying Problems in Capillary Porous Media Through Integral Transformation of Luikov Equations”, Int. J. Num. Meth. Eng., v.38, pp.1001-1020, 1995.
- [12] RIBEIRO, J.W., COTTA, R.M and MIKHAILOV, M.D., “Integral Transform Solution of Luikov’s Equations for Heat and Mass Transfer in Capillary Porous Media”, Int. J. Heat and Mass Transfer, v.36, pp.4067-4075, 1993.

- [13] THOMAS, H. R., MORGAN, K. and LEWIS R.W., “A fully Nonlinear Analysis of Heat and Mass Transfer Problems”, *Int. J. Num. Meth in Engineering*. V. 15. pp. 1381-1393, 1980.
- [14] SCOFANO NETO, F., COTTA, R.M. e RIBEIRO, J.W, “Alternative Analytical Approach to Diffusion Problems with General Coupling at the Boundaries”, *Anais do X Congr. Bras. Eng. Mecânica*, pp.173-176, Rio de Janeiro, Dezembro, 1989.
- [15] ROCHA, L.B., “Avaliação dos Fluxos de Calor e Massa no Problema de Luikov pelo Método da Transformada Integral”, *Dissertação de Mestrado, UFC*, 1995.
- [16] COTTA , R.M., “Steady-State Diffusion with Space-Dependent Boundary Condition Parameters”, *Anais do 1º Encontro Nacional de Ciências Térmicas-ENCIT 86*, pp.163-166, Rio de Janeiro, 1986.
- [17] SANTOS, C.A C., COTTA, R.M. and ÖZISIK, M.N., “Laminar Forced Convection Inside Externally Finned Tubes”, *Anais do 2º Encontro Nacional de Ciências Térmicas-ENCIT 88*, pp.87-90, Rio de Janeiro, 1988.
- [18] APARECIDO, J.B., COTTA, R.M. and ÖZISIK, M.N., “Analytical Solutions to Two-Dimensional Diffusion Problems in Irregular Geometries”, *J. Franklin Inst.*, v.326, pp.421-434, 1989.
- [19] APARECIDO, J.B. and COTTA, R.M., “Fully Developed Laminar Flow in Trapezoidal Ducts”, *Anais do IX Congr. Bras. de Eng. Mecânica - IX COBEM*, v.1, pp.25-28, 1987.
- [20] COTTA, R.M., “Benchmark Results in Computational Heat and Fluid Flow: The Integral Transform Method”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, v.37, pp.381-393, 1994.
- [21] MIKHAILOV, M.D. and COTTA, R.M., “Integral Transform Solutions by Using Mathematica<sup>®</sup>”, (To Appear) 1997.
- [22] WOLFRAM, S., “The Mathematica Book”, Third Edition, Cambridge University Press, 1998.
- [23] GRAY, J. W., “Mastering Mathematica: Programming Methods and Applications”, Academic Press, 1998.
- [24] MAEDER, R. E., “The Mathematica Programmer II”, Academic Press, 1996.
- [25] COTTA, R.M., *The Integral Transform Method in Thermal and fluid Science and Engineering*, Begell House, UK, 1998.
- [26] DUARTE, J. B. F. and RIBEIRO, J. W., “Generalized Integral Transform Solutions of 3-D Luikov Problems in: *Advanced Computational Methods in Heat Transfer V*”, Computational Mechanics Publications, 1998.

- [27] DUARTE, J.B.F., “Solução Numérica da Difusão de Calor e Massa em Meios Bidimensionais Capilares Porosos”, Dissertação de Mestrado em Física - UFC, Fortaleza, Brasil, 1995.
- [28] IMSL™ Library, MATH/LIB, version 1.1, Houston, Texas, 1989.
- [29] MIKHAILOV, M.D., “On the Solution of the Heat Equation with Time Dependent Coefficient”, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, v.18, pp.344-345, 1975.
- [30] COTTA, R.M. and ÖZISIK, M.N., “Diffusion Problems with General Time-Dependent Coefficients”, *Rev. Bras. de Ciências Mecânicas*, v.9, n.4, pp.269-292, 1987.
- [31] COTTA, R.M., LEIROZ, A.J.K. and APARECIDO, J.B., “Steady-State diffusion Problems with Variable Equation Coefficients”, *Int. J. Heat & Technology*, (em impressão).
- [32] YENER, Y. and ÖZISIK, M.N., “On the Solution of Unsteady Heat Conduction in Multi-Region Finite Media with Time Dependent Heat Transfer Coefficient”, *Anais da 5ª. Conf. Int. Transf. de Calor, Tóquio, Setembro, 1974*.
- [33] COTTA, R.M. and SANTOS, C.A.C., “Transient Diffusion Problems with Time-Dependent Boundary Condition Coefficients”, *J. Eng. Physics*, (em impressão).
- [34] ÖZISIK, M.N. and GUÇERI, S.I., “A Variable Eigenvalue Approach to the Solution of Phase-Change Problems”, *Can J. Chem. Eng.*, v.55, pp.145-148, 1977.
- [35] LEITE, S.Q.B., ÖZISIK, M.N. and VERGHESE, K., “On the Solution of Linear Diffusion Problems in Media with Moving Boundaries”, *Nucl. Sci. & Eng.*, v.76, pp.345-350, 1980.
- [36] COTTA, R.M., “Diffusion in Media with Prescribed Moving Boundaries: - Application to Metals Oxidation at High Temperatures”, *Anais do II Congresso Latino-Americano de Transferência de Calor e Massa*, v.1, pp.502-513, São Paulo, 1986.
- [37] DINIZ, A.J., APARECIDO, J.B. and COTTA, R.M., “Heat Conduction with Ablation in a Finite Slab”, *Int. J. Heat & Mass Technology*, (em impressão).
- [38] APARECIDO, J.B. and COTTA, R.M., “Laminar Flow Inside Hexagonal Ducts”, *Computational Mech.*, v.6, pp.93-100, 1990.
- [39] APARECIDO, J.B. and COTTA, R.M., “Laminar Thermally Developing Flow Inside Right Triangular Ducts”, *Appl. Sci. Res.*, (em impressão).
- [40] MIKHAILOV, M.D. and SHISHEDJIEV, B.K., “Temperature and Moisture Distributions During Contact Drying of a Moist Porous Sheet”, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, v.18, pp.15-24, 1975.

- [41] GUEDES, R.O.C., ÖZISIK, M.N. and COTTA, R.M., “Conjugated Periodic Turbulent Forced Convection in a Parallel Plate Channel”, 1992 National Heat Transfer Conference, HTD v.201, pp.63-70, San Diego, CA, August, 1992.
- [42] ROSSEN, J.L. and HAYAKAWA, K., “Simultaneous Heat and Moisture Transfer in Dehydrated Food: - A Review of Theoretical Models”, Symp. Series of the A. I. Ch. E., v.163, pp.71-81, 1977.
- [43] LOBO, P.D.C., “On the Solution of a Nonlinear Combined Heat and Mass Transfer Problem”, Tese de Doutorado, North Carolina State University, Raleigh, EUA, 1988.
- [44] COTTA, R.M. and ÖZISIK, M.N., “Transient Forced Convection in Laminar Channel Flow with Stepwise Variations of Wall Temperature”, Can. J. Chem. Eng., v.64, pp.734-742, 1986.
- [45] COTTA, R.M. and ÖZISIK, M.N., “Laminar Forced Convection in Ducts with Periodic Variations of Inlet Temperature”, Int. J. Heat and Mass Transfer, v.29, pp.1495-1501, 1986.
- [46] COTTA, R.M., “On the Solution of Periodic Multidimensional Diffusion Problems”, Int. Comm. Heat and Mass Transfer, v.16, pp.549-579, 1989.
- [47] KAKAÇ, S., LI, W. and COTTA, R.M., “Theoretical and Experimental Study of Transient Laminar Forced Convection in a Duct with Timewise Variation of Inlet Temperature”, ASME Winter Annual Meeting”, HTD, v.123, pp.57-63, São Francisco, 1989.
- [48] BAYAZITOGLU, Y. and ÖZISIK, M.N., “On the Solution of Graetz Type Problems with Axial Conduction”, Int. J. Heat and Mass Transfer, v.23, pp.1399-1402, 1980.
- [49] APARECIDO, J.B. and COTTA, R.M., “Thermally Developing Laminar Flow Inside Rectangular Ducts”, Int. J. Heat and Mass Transfer, v.33, n.2, pp.341-347, 1990.
- [50] COTTA, R.M., “Hybrid Numerical-Analytical Approach to Nonlinear Diffusion Problems”, Num. Heat Transfer, part B, v.17, pp.217-226, 1990.
- [51] SERFATY, R. and COTTA, R.M., “Integral Transform Solutions of Diffusion Problems with Nonlinear Equation Coefficients”, Int. Comm. Heat and Mass Transfer, v.17, pp.851-864, 1990.
- [52] COTTA, R.M. and SERFATY, R., “Integral Transform Algorithm for Parabolic Problems with Nonlinear Boundary and Equation Source Terms”, Proc. of the Seventh International Conf. on Num. Methods in Thermal Problems, v.VII, part 2, pp.916-926, Stanford, EUA, 1991.
- [53] BOYCE, W. E., DIPRIMA, R. C., “Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno”, Guanabara Dois, 3<sup>a</sup>. Ed., Rio de Janeiro, 1979.

- [54] RIBEIRO, J.W., “Solução das Equações de Luikov para Secagem em Meios Capilares Porosos pela Técnica da Transformada Integral”, (Tese de Doutorado) São José dos Campos, 1992.
- [55] DUARTE, J.B.F., RIBEIRO, J.W. and COTTA, R.M., “Integral Transform Solution of Two-Dimensional Drying of a Moist Porous Media” , Third Int. Congr. on Industrial and Applied Mathematics, July 3-7, 1995.
- [56] WOLFRAM, S., “Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer”, Addison-Wesley, 2nd. Ed., 1993.
- [57] FREIRE, D.G., “Interação entre Computação Simbólica e Numérica: Aplicações à Engenharia Mecânica”, X COBEM, Rio de Janeiro, Brasil, Dezembro 1989.
- [58] KAHRIMANIAN, H. G., “Analytic Differentiation by a Digital Computer”, M.Sc. Thesis, Temple Univ., Philadelphia, 1953.
- [59] NOLAN, J., “Analytic Differentiation on a Digital Computer”, S.M. Thesis, MIT, Massachusetts, 1953.
- [60] VVEDENSKY, D. D., “Partial Differential Equations with Mathematica<sup>®</sup>”, Addison-Wesley, 1993.
- [61] LUIKOV, A.V. and MIKHAILOV, YU.A., “Theory of Energy and Mass Transfer”, Pergamon Press, Oxford, England, 1966.
- [62] LUIKOV, A.V., “Heat and Mass Transfer in Capillary-Porous Bodies”, Advances in Heat Transfer, Academic Press, v.1, London, 1964.
- [63] PHILIP, J. R. and DE VRIES, D. A., “Moisture Movement in Porous Materials under Temperature Gradients”, Trans. Amer. Geophys. Union, V. 38, pp. 222-232, 1957.
- [64] FULFORD, G. D, “A Survey of Recent Soviet Research on the Drying of Solids”, Can. J. Chem. Engg, V. 47, pp. 378-391, 1969.
- [65] LUIKOV, A.V., “Heat and Mass Transfer Bibliography - Soviet Works”, Int. J. Heat & Mass Transfer, v.18, pp.151-158, 1975.
- [66] ROSSEN, J. L. and HAYAKAWA, K., “Parametric Analysis of Simultaneous Heat and Moisture Transfer in Dehydrated Food Subjected to Step or Ramp Functional Changes in Environmental Transfer Potentials”, Lebensm.-Wiss.U.-Technol., V. 10, pp. 217-224, 1977.
- [67] ROSSEN, J. L. and HAYAKAWA, K., “Simultaneous Heat and Moisture Transfer in Capillary-Porous Material in a Moderately Large Time Range”, Lebensm.-Wiss.U.-Technol., V. 10, pp. 273-278, 1977.

- [68] MIKHAILOV, M. D., "Etude Theorique de la Propagation de la Chaleur e de l'Lumidit", Int. J. Heat Mass Transfer, V. 12, pp. 1015-1024, 1969.
- [69] LOBO, P.D.C., MIKHAILOV, M.D. and ÖZISIK, M.N., "On the Complex Eigen-Values of Luikov System of Equations", Drying Technology, v.5, n.2, pp.273-286, 1987.
- [70] LIU, J.Y. and CHENG, S., "Solutions on Luikov Equation of Heat and Mass Transfer in Capillary-Porous Bodies", Int. J. Heat & Mass Transfer, v.37, n.7, pp.1747-1754, 1991.